

Def: Due sottospazi $U, W \subseteq V$ si dicono ortogonali se $U \subseteq W^\perp$. Questo è equivalente a $W \subseteq U^\perp$.

Prop: Sia $p: V \times V \rightarrow k$ simm. non-deg., $U, W \subseteq V$ sottosp.

- i) $U \subseteq W \Leftrightarrow W^\perp \subseteq U^\perp$
- ii) $(U^\perp)^\perp = U$
- iii) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ (vera anche se p è deg.)
- iv) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$
- v) $\dim_k U + \dim_k (U^\perp) = \dim_k V$

Dim: iniziamo da (v) + prendiamo una base di U

$\{e_1, \dots, e_r\}$ e completiamo ad una base $E = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ di V . Nella base E p ha matrice A (invertibile).

Otteniamo le equazioni di $U^\perp$:

hanno come coefficienti le prime r righe di A :

$$\text{Se } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^n \quad p(e_1, Ex) = (1 \ 0 \dots 0) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

Ma poiché A ha rango massimo, queste sono

lin. indep. $\Rightarrow U^\perp$ ha dimensione $n-r$ //

Ora (ii): chiaramente $(U^\perp)^\perp \supseteq U$

$$\text{ma } \dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp = \dim V = \dim U + \dim U^\perp //$$

$$(i): \quad U \subseteq W \Rightarrow W^\perp \subseteq U^\perp \text{ ovvio,}$$

(21)

sfruttiamo (ii) e otteniamo $W^\perp \subseteq U^\perp \Rightarrow U \subseteq W = (W^\perp)^\perp$

(iii): vera sempre (per linearità...)

(iv): poiché $U \cap W \subseteq U, W$

$$\text{allora } (U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$$

$$\text{Grassmann: } \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$$

$$\dim(U \cap W)^\perp = n + \dim(U + W) - \dim U - \dim W$$

$$\begin{aligned} \dim(U^\perp + W^\perp) &= \underbrace{\dim U^\perp}_{n - \dim U} + \underbrace{\dim W^\perp}_{n - \dim W} - \underbrace{\dim(U^\perp \cap W^\perp)}_{= \dim(U + W)^\perp} \\ &= n - \dim(U + W) \end{aligned}$$

Attenzione $\triangle$: la (v) sembrerebbe indicare

una somma diretta... ma non è sempre così:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_1$ è isotropo (anche $\underline{e}_2$):

quindi $\langle \underline{e}_1 \rangle^\perp \ni \underline{e}_1$, mentre $\underline{e}_2 \notin \langle \underline{e}_1 \rangle^\perp$

quindi $\langle \underline{e}_1 \rangle^\perp = \langle \underline{e}_1 \rangle$, le dimensioni

verificano $\dim \langle \underline{e}_1 \rangle + \dim \langle \underline{e}_1 \rangle^\perp = 2$

ma non sono in somma diretta!

Vediamo quindi invece abbiamo $\bar{U} \oplus U^\perp = V$

• Il primo caso è quando $v \notin I_\beta(V)$:

In questo caso $\beta(v,v) \neq 0$, quindi $v \notin v^\perp$,

quindi $\langle v \rangle \cap v^\perp = \{0\}$,

quindi $\langle v \rangle \oplus v^\perp = \bar{V}$, chi sono le proiezioni?

Sia $w \in V$, troviamo le componenti:

$$w = \underbrace{\frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} v}_{\in \langle v \rangle} + \underbrace{\left(w - \frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} v \right)}_{\in v^\perp}$$

$$\beta(v, w - \frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} v) = 0$$

$$\alpha_v(w) = \frac{\beta(w,v)}{\beta(v,v)} \quad \text{coeff. di Fourier di } w \text{ lungo } v$$

• In generale, se $U \subseteq V$ sottosp. vet., sono equivalenti:

- (i) $U \cap U^\perp = \{0\}$
- (ii) $\beta|_{U \times U}$ è un f. bilin. non-degenera
- (iii) $\bar{V} = U \oplus U^\perp$

Dim: (i) $\Leftrightarrow$ (iii) ovvio

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Se $\beta|_{U \times U}$ è degenera, allora $\exists u_0 \neq 0$ t.c.

$\beta(u_0, u) = 0 \quad \forall u \in U$, quindi $u_0 \in U \cap U^\perp$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se $U \cap U^\perp \ni u_0 \neq 0$ allora $\beta(u_0, u) = 0 \quad \forall u \in U$ $\square$

Come avviene per il prodotto scalare, se abbiamo una base di U con vettori 2×2 ortogonali, otteniamo facilmente le proiezioni su U e quindi la decomposizione in $U \oplus U^\perp$.

Come trovarla? Algoritmo di Lagrange (G-S)

Def. sia V uno sp. vett. di $\dim V < \infty / k$, $\beta: V \times V \rightarrow k$ simmetrico
Una base $E = (e_1, \dots, e_n)$ di V è detta "ortogonale",
o β -ortogonale, o β -diagonalizzante, se
 $\beta(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ (la matrice A di β è diagonale)

Teor. Se $2 \neq 0$ in k , sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ simm.,
allora $\exists$ una base E di V β -diagonalizzante.

Dim. se $\beta = 0$ è ovvio. Supponiamo $\beta \neq 0$ e ragioniamo per induzione su $\dim V$: $n=1$ β è diagonale.
Sia $n = \dim V \geq 2$. Esistono 2 vettori $u, w \in V$
t.c. $\beta(u, w) \neq 0$. Allora o $\beta(u, u) \neq 0$ oppure
 $\beta(w, w) \neq 0$ oppure $\beta(u+w, u+w) \neq 0$,
infatti se i primi 2 sono entrambi nulli
allora si ha $\beta(u+w, u+w) = 2\beta(u, w) \neq 0$
(con $k \neq 2$!)

Quindi troviamo un vettore e_1 t.c. $\beta(e_1, e_1) \neq 0$. (24)

Quindi $\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$ e $\dim \langle e_1 \rangle^\perp = n-1$.

Per induzione $\langle e_1 \rangle^\perp$ ammette una base ortogonale $\{e_2, \dots, e_n\}$. $\square$

Questa dimostrazione può essere resa più costruttiva tramite l'algoritmo di Lagrange:

Iniziamo da una base E di V , β con matrice A , costruiamo una base E' dove β abbia matrice diag.

1° passo: vogliamo e' t.c. $\beta(e', e') \neq 0$

- se $\beta(e_1, e_1) \neq 0$ $e' = e_1$

- se $\beta(e_1, e_1) = 0$ e $\beta(e_i, e_i) \neq 0$

permutiamo e_1 con e_i (per il più piccolo i)

- se invece $\beta(e_1, e_1) = \beta(e_2, e_2) = \dots = \beta(e_n, e_n) = 0$

prendiamo $\beta(e_i, e_j) \neq 0$ (per i più piccolo $i < j$)

poniamo $E' = (e_i + e_j, e_1, \dots, \cancel{e_i}, \dots, \cancel{e_j}, \dots, e_n)$

allora $\beta(e_i + e_j, e_i + e_j) = 2\beta(e_i, e_j) \neq 0$

2° passo: E è la base ottenuta sopra,

con $\beta(e_1, e_1) \neq 0$. Quindi e_1 non è isotropo.

prendiamo i coeff. di Fourier $\alpha_{e_1}(-) = \frac{\beta(e_1, -)}{\beta(e_1, e_1)}$

e poniamo $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2 - \alpha_{e_1}(e_2)e_1, \dots, e'_n = e_n - \alpha_{e_1}(e_n)e_1$

otteniamo una nuova base di vettori, in cui i

vettori $e'_2, \dots, e'_n$ sono ortogonali a e_1 .

Se $E' = EP$. La nuova matrice $A' = {}^t P A P$

ha la forma

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & & & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & & & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

3° passo: ripetiamo a partire da e'_2 e $b_{22} \dots$

otteniamo

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

e andiamo avanti.



Osservazione: In ogni passo il determinante

non cambia: $\det(A') = \det A$.

$$\det(P)^2 \det(A)$$

Esercizio: trovare una base diagonalizzante e
per la form. bil. su k^3 con matrice

(26)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento: $\beta(e_1, e_1) = \beta(e_2, e_2) = \beta(e_3, e_3) = 0$

$$\beta(e_1, e_2) \neq 0 \quad E' = (e_1 + e_2, e_2, e_3) \quad e'_1 = e_1 + e_2$$

$$\beta(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2 \quad \beta(e_1 + e_2, e_2) = 1 \quad \beta(e_1 + e_2, e_3) = 1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = {}^t P A P \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e''_1 = e'_1 \quad e''_2 = e'_2 - \frac{\beta(e'_1, e'_2)}{\beta(e'_1, e'_1)} e'_1 = e'_2 - \frac{1}{2} e'_1$$

$$e''_3 = e'_3 - \frac{\beta(e'_1, e'_3)}{\beta(e'_1, e'_1)} e'_1 = e'_3 - \frac{1}{2} e'_1$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'' = {}^t P' A' P' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = e''_1 \quad f_2 = e''_2 \quad f_3 = e''_3 - \frac{\beta(e''_2, e''_3)}{\beta(e''_2, e''_2)} e''_2 = e''_3 - \frac{3/2}{-1/2} e''_2 = 3e''_2 + e''_3$$

$$P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A''' = {}^t P'' A'' P'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F = E'' P'' \rightarrow E' P' P'' = E P P' P'' = F Q \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

Quindi, per qualsiasi campo k con $\text{car}(k) \neq 2$,
 possiamo esprimere una forma bilineare in una base
 opportuna, come una matrice diagonale,
 possiamo supporre che d_1 i primi $r = \text{rg}(\beta)$ vettori
 della base siano non-isotropi:

$$\beta(\bar{E}x, \bar{E}y) = {}^t x D y \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre se per $i=1, \dots, r \exists \alpha_i \in k$ t.c. $\alpha_i^2 = d_i$

possiamo prendere la base $\underline{e}'_i = \frac{1}{\alpha_i} \underline{e}_i$ e

otteniamo $\beta(\bar{E}'x, \bar{E}'y) = {}^t x D y$ con $D = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

• Se $k = \mathbb{C}$ ogni forma bilineare simm. β

di rango r su V ammette una base β -diag.

con matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$. Stesso caso per $k = \bar{k}$.

• Se invece $k = \mathbb{R}$, possiamo supporre che

$d_1, d_2, \dots, d_p > 0$ $d_{p+1}, \dots, d_r < 0$ per un intero $0 \leq p \leq r$

e prendere $\underline{e}'_i = \frac{1}{\sqrt{|d_i|}} \underline{e}_i$ $i=1, \dots, r$ $\underline{e}'_j = \underline{e}_j$ $j=r+1, \dots, n$

otteniamo $\beta(\bar{E}'x, \bar{E}'y) = {}^t x D' y$ con $D' = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & I_{r-p} & \\ \hline & & 0_{n-r} \end{array} \right)$

Teor (Sylvester): $V = \text{sp. vet.} / \mathbb{R}$ $\dim_{\mathbb{R}} V = n$

(28)

$\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ f. bil. simm. di rango $\text{rg}(\beta) = r$.

Esiste un intero p con $0 \leq p \leq r$ che dipende
solo da β , e una base $\mathbb{F} = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$ tali che

β abbia matrice $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathbb{F}$.

Dim. bisogna mostrare solo che p dipende
solo da β e non dalla base scelta.

Supponiamo (PA) che in una base $\mathbb{F}$ ci
siano p elementi $= 1$, e in una base $\mathbb{F}'$
ce ne siano t , con $t \leq p$.

Prendiamo i sottospazi $S = \langle \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_p \rangle$

$T = \langle \underline{f}'_1, \dots, \underline{f}'_t \rangle$

Per dimensioni $S \cap T \neq \{0\}$

quindi $0 \neq v = \lambda_1 \underline{f}_1 + \dots + \lambda_p \underline{f}_p = \mu_{t+1} \underline{f}'_{t+1} + \dots + \mu_n \underline{f}'_n$

$$\beta(v, v) = \underbrace{(\lambda_1)^2 + \dots + (\lambda_p)^2}_0 = - \underbrace{(\mu_{t+1})^2 + \dots + (\mu_n)^2}_0 \quad \downarrow$$

Def. la coppia $(p, r-p)$ è detta segnatura di β //

Def. Due matrici quadrate sono "congruenti" (29)

$A, B \in M_n(k)$ se $\exists P \in GL_n(k)$ t.c.

$B = {}^t P A P$, cioè se rappresentano la stessa forma bilineare (su k^n) rispetto a basi diverse. //

Dato una forma bil. sim. $\beta: V \times V \rightarrow k$,

possiamo definire un'app. $q: V \rightarrow k$

ponendo $q(v) = \beta(v, v)$, $v \in V$.

Questa è detta "forma quadratica associata a β "

e verifica le seguenti proprietà:

$$i) \quad q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) \quad \left| \begin{array}{l} \forall \lambda \in k \\ \forall v \in V \end{array} \right.$$

$$ii) \quad q(v+w) - q(v) - q(w) = 2\beta(v, w) \quad \left| \begin{array}{l} \forall v, w \in V \end{array} \right.$$

(In generale $q: V \rightarrow k$ è una f. quadratica

se verifica (i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ e (ii) $q(v+w) - q(v) - q(w)$ è bilin.)

Se $\text{car}(k) \neq 2$ vediamo che da q

possiamo ricostruire $\beta(v, w) = \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w))$

Fissando una base E di V :

(30)

- una forma quadratica è un polinomio omogeneo di grado 2 in $x_1, \dots, x_n$

- se $\beta(Ex, Ey) = {}^t x A y$ allora

$$Q(Ex) = {}^t x A x = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

e il polinomio omogeneo associato

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q_{ij} x_i x_j = {}^t x A x$$

$$\text{con } q_{ii} = a_{ii} \quad i=1, \dots, n$$

$$q_{ij} = 2a_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$$

- Se E è diagonalizzante per β allora

$$Q(x_1, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

2 ATTENZIONE: Se $\dim(K)=2$ una f. quadratica può non essere la f. quadratica associata a una f. bilineare simmetrica:

$$\text{p.e. } Q(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \text{pol. omog. grado 2}$$

$$\text{verifica } Q(\lambda(x_1, x_2)) = \lambda^2 Q(x_1, x_2)$$

$$Q(v+w) = Q(v) + Q(w) \quad \text{e' bilineare}$$

$$\text{ma } (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 \neq x_1 x_2$$

Sui numeri reali $\mathbb{R}$. (forme bil. simm. $\leftrightarrow$ forme quad.)

Abbiamo visto che esiste base per V dove una forma data $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ha matrice

$$A \left(\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_{r-p} \\ \hline & & 0 \end{array} \right)$$

quindi $Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{r+p}^2$

Questo è detto "forma canonica" della forma quadratica q ,
(con segnatura $(p, r-p)$)

Def: Una f. quadratica $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice:

- i) definita positiva se $q(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
- ii) semidefinita positiva se $q(v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
- iii) definita negativa se $q(v) < 0 \quad \forall v \neq 0$
- iv) semidefinita negativa se $q(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$
- v) indefinita se non è semidef. positiva né negativa

Coroll: $A \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva

sse $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c. $A = {}^t P D P$

Teor: $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice quadrata simmetrica

è def. pos. $\Leftrightarrow$ t.t. i minori principali sono positivi

È def. negativa $\Leftrightarrow D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$

Lemma: Se $A \in M_n(k)$ e $C \in M_n(k)$ è un triangolo inferiore allora gli stessi i minori principali di A e tCAC coincidono.

Dim (L): mostriamo che i minori di A e AC coincidono.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & c_{12}A^{(1)} + A^{(2)} & \dots & c_{1n}A^{(1)} + A^{(n)} \\ & \ddots & & \\ & & A^{(n-1)} & c_{n-1,n}A^{(n-1)} + A^{(n)} \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A) = \det(AC)$ e stesso caso per i minori principali

Quindi anche tCA e A hanno gli stessi min. princ.

Quindi anche tCAC e A $\square$

Dim (Teor.): per induzione su n . $n=1$ ok ✓

Supp $n > 1$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ def. pos.

allora $a_{11} = D_1 = {}^t e_1 A e_1 > 0$

sia
$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora ${}^t C A C$ corrisponde ad f. bilin.

nella base $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} e_1, \dots, e'_n = e_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}} e_1$

(Lagrange) $\Rightarrow e'_2, \dots, e'_n$ sono ortogonali ad e'_1

$\Rightarrow {}^t C A C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{11} & \dots & a'_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n-1,1} & \dots & a'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ ha gli stessi minori princ. di A (lemma)

È simmetrica
def. pos.

$A' = (a'_{ij}) \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ è simm. def. pos.

ipotesi induttiva $\Rightarrow$ i minori $D'_1, \dots, D'_{n-1}$ princ. di A' sono positivi.

ma $D_i = a_{11} D'_{i-1}$, quindi $D_i > 0 \quad i=2, \dots, n$.

Vice versa: supponiamo $D_1, \dots, D_n > 0$

(34)

allora $a_{11} = D_1 > 0$ e prendendo C come sopra

abbiamo $t_{CAC} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$ con $A' \in M_{n-1}(\mathbb{R})$
sim.

i minori di A' sono $D_i' = \frac{D_{i+1}}{a_{11}} = \frac{D_{i+1}}{D_1} > 0$

quindi per ipotesi induttiva A' è def. positiva,

ma allora anche t_{CAC} è def. pos.

$\Rightarrow A$ è def. pos. $\square$

Def. Su V uno sp. vet. / $\mathbb{R}$, una f. bil.

simmetrica e def. positiva è detta un prodotto scalare,

è denoto con $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Esistono basi di V dove $\langle -, - \rangle$ ha la

matrice identità come matrice associata,

queste sono dette "basi ortonormali".

Una coppia $(V, \langle -, - \rangle)$ è "sp. vettoriale euclideo".

Uno spazio affine A con sp. vettoriale sottostante

V munito di prod. scalare è detto "spazio euclideo".

p1.5 Sp. Vett. + Strutture Aggiuntive

Abbiamo visto come classificare le forme quadratiche real.
Possiamo chiederci, in generale, come classificare
"spazi muniti di struttura":

- i) dare dei "modelli canonici" per questi spazi
- ii) dato uno spazio qualsiasi determinare a quale modello canonico è isomorfo.
- iii) Determinare gli automorfismi.

Esempi

	modello canonico	invariante che determina la class. fic.	Automorf.
$V = \text{Spazi vett.} / k$	k^n	$n = \dim_k V$	$GL_n(k)$
$A = \text{sp. affine} / k$	A_k^n	$n = \dim_k A$	$GL_n(k) \times k^n$ affinità
$(V, \langle, \rangle) = \text{sp. vett. euclideo}$	$(\mathbb{R}^n, \cdot)$	$n = \dim_{\mathbb{R}} V$	$O_n(\mathbb{R})$
$(E, V, \langle, \rangle) = \text{spazio euclideo}$	$(A_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}^n, \cdot)$	$n = \dim$	$O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ isometrie
$(V, \beta) = \text{sp. vett.} / \mathbb{R}$ con forma bil. <u>sim.</u>	$\mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$(n, p, r-p)$ $n = \dim V$ $(p, r-p) = \text{seg. definita}$	Automorfismi?

Per tutti gli esempi abbiamo scelto una struttura di matrice sullo sp. vettoriale (o affine) poi abbiamo detto cosa sono isomorfismi tra due spazi che rispettano la struttura:

p.es. se diamo (V, β) dove

$V =$ sp. vett. di dim. finita / k

$\beta =$ forma bil. simmetrica $V \times V \rightarrow k$.

diciamo che $(V, \beta) \cong (V', \beta')$ se

$\exists \varphi: V \rightarrow V'$ isomorf. di sp. vettoriali t.c.

$$\beta'(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \beta(v_1, v_2)$$

Quello che abbiamo mostrato ieri: se $k = \mathbb{R}$

troviamo una base diag. E con matrice associata a β' $\begin{pmatrix} I_p & \\ & I_{r-p} \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ troviamo isomorfismo

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow V \quad \text{che rispetta}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Ex$$

la forma β' su V e $\beta = \begin{pmatrix} I_p & \\ & I_{r-p} \\ & & 0 \end{pmatrix}$ su $\mathbb{R}^n$.

chi sono gli automorfismi?