

Programma

2

1) Alg. Lineare : - forme bilineari

forme simmetriche, prod. scalari, forme alternanti, ecc.
ortogonalità, ..., basi ortonormali, ...

2) Geom. Proiettiva : - Spazi proiettivi

ottospazi, intersezioni, proiezioni, ecc.

- Curve nel piano proiettivo (coniche)

- Superfici nello spazio proiettivo

3) Topologia : aperti, chiusi, compatti, successioni,
convergenza, ...

4) Geom. Diff. : curve, superfici

varietà diff., integrazione, ...

Raccomandazioni

1. Richiami di Alg. Lin. e Notazioni

(3)

k campo

$V = \text{sp. vett. su } k$, $W = \text{sp. vett. / } k$

$\text{Hom}_k(V, W) = \text{appl. } k\text{-lineari}$

$$V^* = V^\vee = \text{Hom}_k(V, k)$$

$E = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ base per V

$\varphi: V \rightarrow W$ $F = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ base di W

$$\varphi(\underline{e}_i) = \alpha_{1i} \underline{f}_1 + \alpha_{2i} \underline{f}_2 + \dots + \alpha_{mi} \underline{f}_m = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m) \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(k)$

$$\varphi(E) = FA$$

vettore in V $v = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n = E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = E \underline{x}$

$$\varphi(E \underline{x}) = FA \underline{x}$$

Nuova base $E' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n) = \left(E \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, E \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \right)$

$$P = (x_{ij}) \in GL_n(k) \quad E' = EP \quad E = E'P^{-1}$$

$$F' = FQ \quad F = F'Q^{-1} \quad F' = FQ^{-1}$$

$$\varphi(E' \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = \varphi(EP \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = FA P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = F' Q^{-1} A P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Endomorfismi $\varphi: V \rightarrow V$ k -lineare (4)

$E = (e_1, \dots, e_n)$ base di V $\varphi(E) = EA$

$$E' = EP \quad E = E'P^{-1} \quad \varphi(E'x) = \varphi\left(E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = EA \cdot x$$

$$\varphi(E'y) = \varphi(EPy) = EAP \cdot y = E'P^{-1}AP \cdot y$$

$$\varphi(E') = E'(P^{-1}AP)$$

Spazi duali: $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$

Se V ha dimensione finita e $E = (e_1, \dots, e_n)$ base
 $\varepsilon_i: V \rightarrow k$ definito da $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$

Facile vedere che $E^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base per V^*
base duale

Domanda: Se V ha dimensione infinita??

Base = "Base algebrica" cioè:

- insieme di vettori lin. indipendenti;
- generatori: ogni vett. di V è comb. lin. finita di elem. nella base.

(es.) $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} k = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots, 0) \mid a_i \in k \}$ $\left. \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ a_i \in k \end{matrix} \right\}$

base: $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unico posto}}}, 1, 0, \dots)$

$E = (e_1, \dots)$
base infinita

In questo caso possiamo definire

$$\varepsilon_i: V \longrightarrow k$$

$$e_j \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } j=i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

l'insieme (infinito) $\{\varepsilon_i\} \subset V^*$ è

lin. indip ma non è una base.

consideriamo l'app. lineare

$$\varphi: V \longrightarrow k$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, 0, 0, \dots) \longmapsto \sum_{j=1}^{+\infty} a_j$$

è un'app. k-lineare, è b. def.

ma non è somma (finita) di ε_i



Si può dimostrare che V^* non ha una base numerabile. In part. $V \neq V^*$

$$V^* = \text{Hom}_k(V, k) = \prod_{n \in \mathbb{N}} k = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \mid a_j \in k \}$$

Torniamo al caso $\dim_k V < +\infty$.

(6)

Sia V un k -sp. vetl. $\dim V = n$ $E = (e_1, \dots, e_n)$ base

$\Rightarrow E^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base duale di V^*

Quindi possiamo costruire un isomorfismo

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{f} V^* & f(E) &= E^* \\ e_1 &\mapsto \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ e_n &\mapsto \varepsilon_n \end{aligned}$$

2 Attenzione: se cambiamo base, prendiamo E' e E'^* otteniamo un altro isomorfismo $f': V \xrightarrow{\cong} V^*$ in generale $f \neq f'$ sono diversi!

In generale esistono isomorfismi detti "canonici" tra spazi vettoriali, definiti in maniera naturale senza dover fissare una (o delle) base,

Esempio: fissiamo 2 spazi vettoriali V e W , entrambi di dimensione finita. $\dim_k V = n$, $\dim_k W = m$
Allora $\dim_k(\text{Hom}_k(V, W)) = m \cdot n = \dim_k \text{Hom}_k(W^*, V^*)$
quindi sono isomorfi. Ma abbiamo anche un isomorfismo canonico:

Se $f: V \rightarrow W$ è un'appl. lineare
e $\varphi \in W^*$, allora $\varphi \circ f \in V^*$

Quindi abbiamo un'applicazione

$$\begin{aligned} (f: V \rightarrow W) \in \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}(W^*, V^*) \\ f &\longmapsto f^*: W^* \rightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Questa è un'appl. lineare canonica

a) mostrare che è lineare

[Ex]:) dimostrare che è un isomorfismo.

ii) Se V e/o W hanno dimensione infinita?

Prop:

Se $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$ $V^{**} = \text{Hom}_k(V^*, k)$

abbiamo un'appl. lineare canonica iniettiva

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto \psi_v: V^* \longrightarrow k \\ &\varphi \longmapsto \varphi(v) \end{aligned}$$

lineare: $\psi_{v+w} = \psi_v + \psi_w$ ecc.,

iniettiva: Se $v \neq 0$ base $(\underset{v}{e_1}, \dots)$ $\psi_v(e_1) = e_1(v) = 1 \neq 0$

Coroll: Se $\dim_k V < +\infty \exists$ isomorf. canonico $V \cong V^{**}$

§ 1.2 Forme Bilineari

⑧

Def: ① Sia V uno sp. vet. / k

Un'applicazione $\beta: V \times V \rightarrow k$ si dice
"forma bilineare su V " se:

$$i) \quad \beta(v+v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w) \quad \forall v, v', w \in V$$

$$ii) \quad \beta(v, w+w') = \beta(v, w) + \beta(v, w')$$

$$iii) \quad \beta(\lambda v, w) = \beta(v, \lambda w) = \lambda \beta(v, w) \quad \forall v, w \in V, \lambda \in k$$

② Una forma bilineare $\beta: V \times V \rightarrow k$ si dice

- simmetrica se $\beta(v, w) = \beta(w, v) \quad \forall v, w \in V$

- antisimmetrica se $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$

- alternante se $\beta(v, v) = 0 \quad \forall v \in V$.

Prop: Se una f. bil. β è antisimmetrica allora

β è ~~alternante~~ antisimmetrica.

Dim: $0 = \beta(v+w, v+w) = \beta(v, v) + \beta(v, w) + \beta(w, v) + \beta(w, w)$

$$\Rightarrow \beta(v, w) = -\beta(w, v) \quad \square$$

Ex Quando vale il viceversa?

es. $\Rightarrow \beta: V \times V \rightarrow k$ la forma nulla è una f.bil. ⁽⁷⁾
 $(v, v) \mapsto 0$

ii) Se $V = \mathbb{R}^n$ uno sp. vet. / $\mathbb{R}$ di dim. finita.

$\bullet: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ prod. scal. è una f.bil. (sim.)

iii) Se $V = \mathbb{C}^n$ il prod. hermitiano

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$((z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n)) \mapsto \sum z_i \bar{w}_i$$

NON è una forma bilineare.

iv) $V = C^0[0, 1] = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è bilin. (sim.)

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

v) $V = k^n$ $A \in M_{n \times n}(k)$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in k^n$

$\beta(x, y) = {}^t x A y$ è una f.bilin. su V .

esplicitamente $\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j =$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

In part. $a_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

Possono definire anche forme bilineari su
spazi vettoriali differenti: V, W, Z sp. vett. / k

- $\beta: V \times W \rightarrow k$ è bil. se lin. in ogni variabile
- $\beta: V \times W \rightarrow Z$ è bil.

$$\text{Bil}_k(V \times V, k), \text{Bil}_k(V \times W, k), \text{Bil}_k(V \times W, Z)$$

sono sp. vett. su k , di dim. finita

se V (resp. V, W e V, W, Z) lo sono.

Sia $\beta: V \times W \rightarrow k$ una f. bilin.

possiamo definire 2 appl. lin.

$$\beta_1: V \rightarrow W^*$$

$$v \mapsto \beta_{1,v}: W \rightarrow k$$

$$w \mapsto \beta(v, w)$$

$$\beta_1(v) = \beta(v, -)$$

$$\uparrow$$

$$W^*$$

$$\beta_2: W \rightarrow V^*$$

$$w \mapsto \beta_{2,w}: V \rightarrow k$$

$$v \mapsto \beta(v, w)$$

$$\beta_2(w) = \beta(-, w)$$

Viceversa, data $\beta_1: V \rightarrow W^*$ possiamo

definire una f. bilin. $\beta: V \times W \rightarrow k$

$$(v, w) \mapsto (\beta_1(v))(w)$$

(11)
Ex i) Mostrare che esistono iso canonici

$$\text{Bil}_k(V \times W, k) \longrightarrow \text{Hom}_k(V, W^*)$$

$$\beta \longmapsto \beta_1$$

$$\text{Bil}_k(V \times W, k) \longrightarrow \text{Hom}_k(W, V^*)$$

$$\beta \longmapsto \beta_2$$

ii) Se W e V hanno $\dim. < +\infty$

mostrare che β_1 e β_2 sono trasposte
una dell'altra.

iii) Se hanno $\dim.$ infinito??

Def: Una forma bil. $\beta: V \times W \rightarrow k$ è

• non-degenera a sinistra se $\text{Ker}(\beta_1) = 0$,

cioè se $\beta(v, w) = 0 \forall w \in W \Rightarrow v = 0$

• non-degenera a destra se $\text{Ker}(\beta_2) = 0$,

cioè se $\beta(v, w) = 0 \forall v \in V \Rightarrow w = 0$

• non-degenera se è non-deg a dx e sx.

(Es.) Sia $W = V^*$ e $\beta_2 = \text{id}_{V^*} \Rightarrow \beta: V \times V^* \rightarrow k$
 $(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$
è non-degenera (accoppiamento di dualità)

Domanda: chi è β_1 in questo caso??

(2)

[Ex] Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ f. bil.

mostrare che β è simmetrico $\Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$

β è antisimmetr. $\Leftrightarrow \beta_1 = -\beta_2$

[Ex] Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ f. bilin., con $\dim_k V < \infty$
 Sono equivalenti:

i) β è non-deg e S_x

ii) β è non-deg e A_x

iii) β_1 è un isom.

iv) β_2 è un isom.

v) $\forall v \neq 0 \in V \exists w \in V$ t.c. $\beta(v, w) \neq 0$

vi) $\forall w \neq 0 \in V \exists v \in V$ t.c. $\beta(v, w) \neq 0$

[Ex] Sia $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $V \cong k^2$

trovare una forma bil. su V antisimmetrica
 non alterante.

Trovare le condizioni per cui una forma

antisimmetrica su V sia anche alterante.

§ 1.3 : Forme Biline. e Matrici ($\dim_k V < \infty$) (13)

Qui abbiamo visto su $V = k^n$ i-esimo posto
con base $(e_1, \dots, e_n)$ $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

una forma bilineare $\beta(x, y) = {}^t x A y$

dove $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(k)$ ~~definita~~

$${}^t x A y = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

Abbiamo osservato : $a_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

La stessa cosa si può fare per $\beta: V \times V \rightarrow k$

Sia V sp. vet. / k con $\dim_k V < \infty$

Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ forma bilin.

Se $E = (e_1, \dots, e_n)$ base di V

ogni vettore $v \in V$ si scrive come $E x = E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Allora se $A = (a_{ij}) = (\beta(e_i, e_j)) \in M_{n \times n}(k)$

$$\beta(E x, E y) = \beta\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i \beta(e_i, e_j) y_j = {}^t x A y =$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se cambiamo base? $E' = EP$, $P \in GL_n(k)$ (14)

$$\begin{aligned}\beta(E'_x, E'_y) &= \beta(EP_x, EP_y) = \\ &= {}^t(P_x) A(P_y) = {}^t x \cdot ({}^t P A P) \cdot y\end{aligned}$$

Matrice nella nuova base è ${}^t P \cdot A \cdot P$

Osservazione $\text{rg}({}^t P A P) = \text{rg}(A)$
(ma $\det({}^t P A P) = \det(P)^2 \det(A)$)

Chi sono le matrici associate a $\beta, V \rightarrow V^*$ e
 $\beta_2: V \rightarrow V^*$ nelle basi E, E^* ??

$$\beta_1: V \rightarrow V^*$$

$$v \mapsto (\beta(v, -): V \rightarrow k)$$

$$w \mapsto \beta(v, w)$$

$$e_i \mapsto \beta(e_i, -): E \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \mapsto (1 \ 0 \ \dots \ 0) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$
$$(a_{11} \ \dots \ a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$\parallel$$

$$(a_{11} \varepsilon_1 + \dots + a_{1n} \varepsilon_n) (E \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right))$$

$$e_i \mapsto a_{i1} \varepsilon_1 + \dots + a_{in} \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \beta_1(E) = E^*({}^t A)$$

Invece

$$\beta_2: V \longrightarrow V^*$$

$$v \longmapsto [\beta_2(-, v): V \rightarrow k]$$

$$e_i \longmapsto \beta(-, e_i): V \rightarrow k$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$(a_{n1} e_1 + \dots + a_{n1} e_n) \left(E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

$$e_i \longmapsto E^* \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta_2(E) = E^* A$$

In particolare β simm. $\Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 \Leftrightarrow A = {}^t A$

e β antisymm. $\Leftrightarrow \beta_1 = -\beta_2 \Leftrightarrow A = -{}^t A$

(Ovvio perché $A = (\beta(e_i, e_j))_{i,j}$)

Osservazione: $\beta: V \times V \rightarrow k$ è non-degenera

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

(16)

Prop: Se $\text{car}(k) \neq 2$ ogni forma bilineare
 è somma di una simmetrica e una alternante.

Dim: i) Se $\dim_k V < \infty$ fissiamo una base E
 sia $\beta(Ex, Ey) = {}^t x A y$ con $A = (\beta(e_i, e_j))$

$$\text{Allora } A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^t A)}_{\text{matrice sim.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^t A)}_{\text{matrice alt.}}$$

ii) in generale, se $\beta: V \times V \rightarrow k$ forma bil.

$$\text{definiamo } \sigma: V \times V \rightarrow k \\ (v, w) \mapsto \beta(v, w) + \beta(w, v)$$

$$\text{e } \omega: V \times V \rightarrow k \\ (v, w) \mapsto \beta(v, w) - \beta(w, v)$$

$$\text{Allora } \beta = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\omega \quad \square$$

Osservazione: $\text{Bil}_k(V \times V, k) = \text{Sym}(V \times V, k) \oplus \text{Alt}(V \times V, k)$
 decomposizione (canonica) in somma diretta

Domanda: a cosa corrisponde questa
 decomposizione in $\text{Hom}_k(V, V^*)$??

ExSia $\beta: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1 y_2 - 2x_2 y_4 + x_3 y_3$$

- (i) Matrice di β rispetto E base canonica
- (ii) Verificare che β è degenere
- (iii) trovare $x_0 \in \mathbb{R}^4$ t.c. $\beta(x_0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^4$
- (iv) trovare $y_0 \in \mathbb{R}^4$ t.c. $\beta(x, y_0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$
- (v) Sia $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_4 - e_1$, $e'_3 = e_1 + e_2$, $e'_4 = e_3$
trovare la matrice di β rispetto $E' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) $\text{rg}(A) \leq 3 \Rightarrow A$ è degenere

(iii) $x_0 \in \text{Ker}(\beta_1: V \rightarrow V^*)$
 $x \mapsto \beta(x, -)$

matrice di β_1 è ${}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_0 = e_4$ funziona

(iv) $y_0 \in \text{Ker}(\beta_2: V \rightarrow V^*)$
 $y \mapsto \beta(-, y)$ matrice A $\leadsto y_0 = e_1 \checkmark$

§ 1.4 Ortogonalità

(18)

Consideriamo adesso solo sp. vetl. di dim. finita / k
e una forma bilineare $\beta: V \times V \rightarrow k$ simmetrica

DEF Se $v \in V$ diciamo che $w \in V$ è ortogonale a v
quando $\beta(v, w) = 0$, v e w sono ortogonali
(o β -ortogonali), e scriviamo $v \perp w$.

• ~~Se~~ Se $S \subseteq V$ sottoinsieme

$$S^\perp := \{ w \in V / \beta(v, w) = 0 \ \forall v \in S \} \subseteq V$$

questo è un sottosp. vetl. di V (EX)

Oss: • se $S = \{0\}$ $S^\perp = V$

• se $S = \{v\}$ scriviamo $v^\perp = \{v\}^\perp$

e chiaramente $v^\perp = \langle v \rangle^\perp$

• Se $S = V$ chiamiamo $V^\perp$ il "radicale" di V .

• $V^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \beta$ è non degenera.

EX :) Se β è non degenera,

mostrare che $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$ è il sottosp.

di V generato da S . ii) E se β è degenera?

Def: diciamo che un vettore $v \in V$ è
isotropo (o β -isotropo) se $\beta(v, v) = 0$,
 cioè se $v \in v^\perp$.

Oss: Se $v \in V$ è isotropo anche λv lo è, per $\lambda \in k$:

$$\beta(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \beta(v, v) = 0.$$

Chiamiamo "cono isotropo" l'insieme di tutti
 i vettori isotropi. Si denota $I_\beta(V)$.

Ex] Rappresentare in $\mathbb{R}^3$ il cono isotropo per la
 forma bilineare con matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
 per la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

con $a, b > 0$, oppure con oppure con $a > 0$ e $b < 0$

Ex] i) Mostrare che $I_\beta(V) = \{0\} \Rightarrow \beta$ è non degenera

ii) Mostrare che non vale l'implicazione inversa

iii) Se $k = \mathbb{C}$, può essere $I_\beta(V) = \{0\}$??

iv) Mostrare che in generale $I_\beta(V)$ non è
 un sottosp. vettoriale, dare un
 esempio con $\dim_k(V) = 2$.