
GEOMETRIA 2 - Parte A
Corso di Laurea in Matematica
Appello 03/02/2022 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con riferimento proiettivo canonico, considerare i seguenti punti $A = [2 : -2 : -1]$, $B = [2 : -2 : -2]$, $C = [2 : -2 : 2]$, $D = [2 : -2 : 1]$.

- a) Considerare la famiglia $\mathcal{G} := \{\mathcal{C} \text{ conica di } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C, D \in \text{Supp}(\mathcal{C})\}$. Determinare se $\mathcal{G}$ è un sistema lineare di coniche. In caso affermativo calcolarne la dimensione.
- b) Considerare la famiglia $\mathcal{F} := \{\mathcal{C} \text{ conica di } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C, D \in \text{Supp}(\mathcal{C}), \mathcal{C} \text{ è tangente alla retta } r : X - Y = 0\}$. Determinare se $\mathcal{F}$ è un sistema lineare di coniche, in caso affermativo calcolarne la dimensione. Che relazione c'è tra la famiglia $\mathcal{F}$ e la famiglia $\mathcal{G}$?
- c) Determinare tutte le coniche degeneri nella famiglia $\mathcal{F}$. Se esiste, scrivere un'equazione di una conica non degenera C_1 della famiglia $\mathcal{F}$. Se esiste, scrivere un'equazione di una conica degenera C_0 della famiglia $\mathcal{F}$.
- d) Sia C_2 la conica di equazione $X^2 + Y^2 + 2XZ + 2YZ = 0$. Determinare l'intersezione con molteplicità di C_0 e C_2 , dove C_0 è la conica descritta sopra.

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale $V = k^2$ canonico di dimensione 2 sul campo $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ di caratteristica 2, e la seguente funzione

$$q: V \rightarrow k \\ (x, y) \mapsto x^2 + xy,$$

dove $v = (x, y)$ è un vettore di $V = k^2$.

- a) Mostrare che q è una forma quadratica, e calcolare la matrice (in base canonica) della forma bilineare simmetrica $\eta(v_1, v_2) = q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)$.
- b) Esiste una base di V che diagonalizzi la forma ~~quadratica~~ ^{bilineare} η ?
- c) Determinare se esiste una forma bilineare simmetrica $\beta: V \times V \rightarrow k$ tale che per ogni $v \in V$ si abbia $q(v) = \beta(v, v)$. In caso affermativo esibire la matrice in base canonica, in caso negativo motivare la risposta.
- d) Esiste una forma bilineare (non necessariamente simmetrica) $\vartheta: V \times V \rightarrow k$ tale che per ogni $v \in V$ si abbia $q(v) = \vartheta(v, v)$?
- e) Sia ora W lo spazio vettoriale $W = \mathbb{R}^2$ canonico di dimensione 2 sul campo dei numeri reali, considerare la seguente funzione $r: W \rightarrow \mathbb{R}$, $(s, t) \mapsto s^2 + st$. Determinare una forma bilineare simmetrica $\beta: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $w \in W$ si abbia $r(w) = \beta(w, w)$. Calcolare la matrice in base canonica, il rango e la segnatura di β . Determinare il nucleo e il cono isotropo di β .

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ lo spazio proiettivo tridimensionale reale con riferimento proiettivo canonico di coordinate $[x : y : z : w]$. Considerare i punti:

$$A = [1 : 1 : 1 : 1], \quad B = [3 : 3 : 2 : 1], \quad C = [1 : -1 : 2 : -2], \quad D = [4 : -4 : 2 : -2]$$

- a) Qual è il massimo numero di punti linearmente indipendenti in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$? Quanti punti sono necessari per avere un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$? Determinare se i punti A, B, C, D sono linearmente indipendenti.
- b) Determinare la posizione reciproca delle rette $\ell_1 := L(A, B)$ e $\ell_2 := L(C, D)$
- c) Descrivere la proiezione sulla retta ℓ_2 di centro la retta ℓ_1 in coordinate canoniche, ed esibirne una matrice.

Esercizio 1. In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con riferimento proiettivo canonico, considerare i seguenti punti $A = [2 : -2 : -1]$, $B = [2 : -2 : -2]$, $C = [2 : -2 : 2]$, $D = [2 : -2 : 1]$.

- Considerare la famiglia $\mathcal{G} := \{C \text{ conica di } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C, D \in \text{Supp}(C)\}$. Determinare se $\mathcal{G}$ è un sistema lineare di coniche. In caso affermativo calcolarne la dimensione.
- Considerare la famiglia $\mathcal{F} := \{C \text{ conica di } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C, D \in \text{Supp}(C), C \text{ è tangente alla retta } r : X - Y = 0\}$. Determinare se $\mathcal{F}$ è un sistema lineare di coniche, in caso affermativo calcolarne la dimensione. Che relazione c'è tra la famiglia $\mathcal{F}$ e la famiglia $\mathcal{G}$?
- Determinare tutte le coniche degeneri nella famiglia $\mathcal{F}$. Se esiste, scrivere un'equazione di una conica non degenera C_1 della famiglia $\mathcal{F}$. Se esiste, scrivere un'equazione di una conica degenera C_0 della famiglia $\mathcal{F}$.
- Sia C_2 la conica di equazione $X^2 + Y^2 + 2XZ + 2YZ = 0$. Determinare l'intersezione con molteplicità di C_0 e C_2 , dove C_0 è la conica descritta sopra.

Svolgimento:

① Poiché ogni condizione del tipo $P \in \text{Supp}(C)$ è lineare, la famiglia $\mathcal{G}$ è un sistema lineare di coniche, intersezione di 4 iperpiani nello spazio di tutte le coniche. Per calcolare la dimensione, osserviamo che tutti e 4 i punti sono allineati, infatti verificano tutti l'equazione

$$x+y=0, \text{ quindi appartengono alla retta } s: x+y=0.$$

Per calcolare la dimensione, osserviamo che il passaggio per 3 punti allineati implica che la conica è degenera e contiene la retta per i 3 punti; nel supposto, e il passaggio per il 4° punto è sempre soddisfatto in questo caso.

La famiglia è quindi intersezione di 3 iperpiani linearmente indipendenti, ed è un sistema lineare di dimensione 2. La famiglia $\mathcal{G}$ può essere descritta così:

$$\mathcal{G} = \{C = s + l \mid r: x+y=0, l \in \mathbb{P}^{2*}\} =$$

$$= \{C: (x+y)(Ax+By+Cz)=0 \mid [A:B:C] \in \mathbb{P}^{2*}\} =$$

$$= \{C: Ax^2 + By^2 + (A+B)xy + Cxz + Cyz = 0 \mid [A:B:C] \in \mathbb{P}^2\}$$

⑥ Poiché la famiglia $\mathcal{G}$ è composta da coniche degeneri $C = s + l$, con $s: x+y=0$ fissata, e $l \in \mathbb{P}^{2n}$, una tale conica è tangente alla retta $r: x-y=0$ se e solo se $s \cap l \in r$.

Questo avviene se e solo se $s \cap r = [0:0:1] \in l$

La famiglia $\mathcal{F}$ è quindi

$$\mathcal{F} = \{ C = s + l \mid s: x+y=0, l \subset \mathbb{P}^2 \text{ retta per } [0:0:1] \}$$

ed è un sistema lineare di coniche di dimensione 1, cioè un fascio di coniche (tutte degeneri).

Inoltre chiaramente $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, e $\mathcal{F}$ è quindi una retta proiettiva dentro al piano proiettivo $\mathcal{G}$.

⑦ Le coniche in $\mathcal{F}$ (e in $\mathcal{G}$) sono tutte degeneri.

Quindi non esistono coniche non degeneri in $\mathcal{F}$ né in $\mathcal{G}$.

Scegliamo $C_0 = s + r: (x+y)(x-y) = 0$, è una

conica degenera in $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

$$\textcircled{d} \quad G_0 \cap G_2 \quad \text{on} \quad G_2: x^2 + y^2 + 2xz + 2yz = 0$$

$$G_0 = S + \mathcal{F} \quad \text{on} \quad S: x+y=0 \quad \mathcal{F}: x-y=0$$

$$G_2 \cap S = \begin{cases} y = -x \\ x^2 + x^2 + 2xz - 2xz = 0 \end{cases} \quad G_2 \cap \mathcal{F} = 2[0:0:1]$$

$$G_2 \cap \mathcal{F}: \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 + 4xz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ 2x(x+2z) = 0 \end{cases}$$

$$G \cap \mathcal{F} = [0:0:1] + [2:2:-1]$$

$$\Rightarrow G_0 \cdot G_2 = 3[0:0:1] + [2:2:-1]$$

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale $V = k^2$ canonico di dimensione 2 sul campo $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ di caratteristica 2, e la seguente funzione

$$q: V \rightarrow k$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + xy,$$

dove $v = (x, y)$ è un vettore di $V = k^2$.

- Mostrare che q è una forma quadratica, e calcolare la matrice (in base canonica) della forma bilineare simmetrica $\eta(v_1, v_2) = q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)$.
- Esiste una base di V che diagonalizzi la forma ^{bilineare} ~~quadratica~~ η ?
- Determinare se esiste una forma bilineare simmetrica $\beta: V \times V \rightarrow k$ tale che per ogni $v \in V$ si abbia $q(v) = \beta(v, v)$. In caso affermativo esibire la matrice in base canonica, in caso negativo motivare la risposta.
- Esiste una forma bilineare (non necessariamente simmetrica) $\vartheta: V \times V \rightarrow k$ tale che per ogni $v \in V$ si abbia $q(v) = \vartheta(v, v)$?
- Sia ora W lo spazio vettoriale $W = \mathbb{R}^2$ canonico di dimensione 2 sul campo dei numeri reali, considerare la seguente funzione $r: W \rightarrow \mathbb{R}$, $(s, t) \mapsto s^2 + st$. Determinare una forma bilineare simmetrica $\beta: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $w \in W$ si abbia $r(w) = \beta(w, w)$. Calcolare la matrice in base canonica, il rango e la segnatura di β . Determinare il nucleo e il cono isotropo di β .

Svolgimento:

① Siano $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vettori di $V = k^2$ $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

allora $\eta(v_1, v_2) = q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2) =$

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (x_1)^2 - x_1 y_1 - (x_2)^2 - x_2 y_2 =$$

$$= \cancel{x_1^2} + \cancel{2x_1 x_2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{x_1 y_1} + x_1 y_2 + x_2 y_1 + \cancel{x_2 y_2} - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_1 y_1} - \cancel{x_2^2} - \cancel{x_2 y_2} =$$

$$= x_1 y_2 + x_2 y_1 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

è quindi una forma bilineare simmetrica su V , la cui matrice è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

② Poiché k ha caratteristica 2, non possiamo applicare l'algoritmo di Lagrange.

Cerchiamo se esiste una matrice $P \in GL_2(k)$ tale che

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ cioè se } \exists \text{ una base } \{v_1, v_2\} \text{ di } V$$

tale che $\eta(v_i, v_j) = 0$.

Poiché $\forall v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\eta(v, v) = q(v + v) - q(v) - q(v) = 0$,

in una tale base la forma bilineare η dovrebbe essere nulla, impossibile poiché $\eta \neq 0$.

ALTERNATIVAMENTE: Possiamo cercare una matrice $P \in GL_2(k)$ tramite i suoi coefficienti. Poiché $\text{rg}({}^t P A P) = \text{rg}(A) = 2$

dovrà essere ${}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sia $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k)$

$$\begin{aligned} \text{allora } {}^t P A P &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ab+cd & b^2+d^2 \\ a^2+c^2 & ab+cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \end{aligned}$$

Per avere $a^2+c^2=0$ dobbiamo avere $a=c=0$ oppure $a=c=1$

Analogamente $b^2+d^2=0$ ————— $b=d=0$ ————— $b=d=1$

Se $a=c=0$ allora $\det P=0$ e non è possibile

Se $b=d=0$ ————— $\det P=0$ —————

Quindi deve essere $a=b=c=d=1$, ma allora $\det P=0$ $\nexists$

Quindi non esiste $P \in GL_2(k)$ / ${}^t P A P$ è diagonale.

© Se $p: V \times V \rightarrow k$ è f. bilineare simmetrica,

allora $p(v, v) = (x, y) B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $B = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(k)$

$$\text{allora } p(v, v) = (x \ y) B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p x^2 + 2qxy + r y^2$$

quindi NON esiste una tale forma p con

$$p(v, v) = x^2 + xy.$$

d) Possiamo scegliere $\beta(v, v_2) = (x, y_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,
 in questo caso $(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + xy$.

(Osserviamo che anche $\beta(v, v_2) = (x, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
 soddisfa la condizione $\beta(v, v) = x^2 + xy$ ricercata).

e) Sia ora $W = \mathbb{R}^2$ $\gamma: W \rightarrow \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + xy$.

Osserviamo che $\beta((x, y), (x_2, y_2)) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

soddisfa $\beta(x, y), (x, y) = x^2 + xy$ quindi

β è la forma bilineare ricercata, e la sua matrice
 è $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ quindi $\text{sg}(\beta) = 2$.

Osserviamo che $\text{sgn}(\beta) \neq (2, 0)$ in quanto $\beta(e_1, e_2) = 0$
 e $\text{sgn}(\beta) \neq (0, 2)$ per lo stesso motivo.

Quindi $\text{sgn}(\beta) = (1, 1)$.

Poiché $\text{sg}(\beta) = 2$, $\ker(\beta) = 0$.

Invece il cono isotropo è

$$\mathcal{I}_\beta(V) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy = x(x+y) = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

è l'unione delle 2 rette $r_1: x=0$ e $r_2: x+y=0$.

(Quindi $\mathcal{I}_\beta(V) \subset \mathbb{R}^2$ è il supporto di un'iperbole degenera).

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ lo spazio proiettivo tridimensionale reale con riferimento proiettivo canonico di coordinate $[x : y : z : w]$. Considerare i punti:

$$A = [1 : 1 : 1 : 1], \quad B = [3 : 3 : 2 : 1], \quad C = [1 : -1 : 2 : -2], \quad D = [4 : -4 : 2 : -2]$$

- Qual è il massimo numero di punti linearmente indipendenti in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$? Quanti punti sono necessari per avere un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$? Determinare se i punti A, B, C, D sono linearmente indipendenti.
- Determinare la posizione reciproca delle rette $\ell_1 := L(A, B)$ e $\ell_2 := L(C, D)$
- Descrivere la proiezione sulla retta ℓ_2 di centro la retta ℓ_1 in coordinate canoniche, ed esibirne una matrice.

Svolgimento:

$$A = [1 : 1 : 1 : 1] \quad B = [3 : 3 : 2 : 1] \quad C = [1 : -1 : 2 : -2]$$

$$D = [4 : -4 : 2 : -2]$$

Ⓐ Poiché $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ ci possono essere al più 4 punti lin. indep. . Un rif. proiettivo è formato da 5 punti: 4 punti lin. indep. e il punto unito.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -9 \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = -18 \neq 0$$

$\Rightarrow$ I punti A, B, C, D sono linearmente INDIP.

Ⓑ Poiché i 4 punti sono linearmente indipendenti, le rette $\ell_1 = L(A, B)$ e $\ell_2 = L(C, D)$ sono sghembe.

$$\ell_2 = L(C, D) = \{ [\lambda + 2\mu : -\lambda - 2\mu : 2\lambda + \mu : -2\lambda - \mu] / [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1 \} =$$

$$= \{ [t : -t : s : -s] / [t : s] \in \mathbb{P}^1 \}$$

$$c) \quad \pi: \mathbb{P}^3 \setminus l_1 \longrightarrow l_2$$

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} \longmapsto \pi(Q) = L(l_1, Q) \cap l_2$$

$$l_1 = L(A, B) = \{ [\lambda + 3\mu, \lambda + 3\mu, \lambda + 2\mu, \lambda + \mu] \mid [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1 \}$$

Equazione del piano $L(l_1, Q)$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha_0 & x \\ 1 & 3 & \beta_0 & y \\ 1 & 2 & \gamma_0 & z \\ 1 & 1 & \delta_0 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 & x \\ 1 & 0 & \beta_0 & y \\ 1 & -1 & \gamma_0 & z \\ 1 & -2 & \delta_0 & w \end{vmatrix} =$$

$$(\delta_0 - 2\gamma_0 + \beta_0)x + (-\delta_0 - \alpha_0 + 2\gamma_0)y + (2\alpha_0 - 2\beta_0)z + (-\alpha_0 + \beta_0)w = 0$$

$$L(l_1, Q) \cap l_2: [t: -t: s: -s] \mid (\delta_0 - 2\gamma_0 + \beta_0)t + (-\delta_0 - \alpha_0 + 2\gamma_0)(-t) + (2\alpha_0 - 2\beta_0)s + (-\alpha_0 + \beta_0)(-s) = 0$$

$$\Rightarrow t(\alpha_0 + \beta_0 - 4\gamma_0 + 2\delta_0) + s(3\alpha_0 - 3\beta_0) = 0$$

$$\Rightarrow \text{poniamo } t = -3\alpha_0 + 3\beta_0 \text{ e } s = \alpha_0 + \beta_0 - 4\gamma_0 + 2\delta_0$$

e otteniamo $\Rightarrow L(l_1, Q) \cap l_2 =$

$$[-3\alpha_0 + 3\beta_0 : 3\alpha_0 - 3\beta_0 : \alpha_0 + \beta_0 - 4\gamma_0 + 2\delta_0 : -\alpha_0 - \beta_0 + 4\gamma_0 - 2\delta_0]$$

quindi la proiezione $\pi: \mathbb{P}^3 \setminus l_1 \longrightarrow l_2$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{In effetti: } \text{rg}(A) = 2$$

$\text{Ker}(A) = \langle (1, 1, 1, 1), (3, 3, 2, 1) \rangle$ e $\mathbb{P}(\text{Ker} A) = l_1$
 e l'altro sottospazio è $V_{-6} = \langle (1, -1, 2, -2), (2, -2, 1, -1) \rangle$
 e $\mathbb{P}(V_{-6}) = l_2$, quindi A è la matrice
 della proiezione su l_2 di centro l_1 //