
GEOMETRIA 2 - Parte A
Corso di Laurea in Matematica
Appello 18/01/2022 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con riferimeto proiettivo canonico, considerare i seguenti punti $A = [0 : 0 : 1]$, $B = [0 : 4 : 2]$, $C = [6 : 0 : 3]$, $D = [8 : 8 : 4]$.

- a) Considerare la famiglia $\mathcal{F} := \{\mathcal{C} \text{ conica di } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C, D \in \text{Supp}(\mathcal{C}), \mathcal{C} \text{ è tangente alle retta } r : Z + (1 + \sqrt{2})Y = 0\}$. Determinare se $\mathcal{F}$ è un sistema lineare di coniche.
- b) Determinare tutte le coniche degeneri nella famiglia $\mathcal{F}$. Scrivere un'equazione di una conica C_1 non degenera della famiglia $\mathcal{F}$.
- c) Sia C_2 la conica di equazione $X^2 + Y^2 + 2XZ + 2YZ = 0$. Determinare l'intersezione con molteplicità di C_1 e C_2 .
- d) Considerare la retta r di cui sopra, sia $U = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus r$. Descrivere delle coordinate affini di U e le rispettive applicazioni $j : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow U$ e $\vartheta : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. Determinare un'equazione della conica affine $C_2 \cap U$ nelle coordinate affini scelte, e classificarla.

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ dei polinomi reali di grado al più 2, e la seguente funzione:

$$q : V \rightarrow \mathbb{R} \\ P(X) \mapsto P(2)^2 - P'(0)^2 - 2P''(1)P(3),$$

dove $P'(X)$ è la derivata di $P(X)$ e $P''(X)$ la derivata seconda.

- a) Mostrare che q è una forma quadratica, e descrivere la forma bilineare simmetrica associata β .
- b) Determinare se β è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, o indefinita.
- c) Determinare il nucleo di β e il cono isotropo di β .
- d) Determinare la segnatura di β .

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ lo spazio proiettivo tridimensionale con riferimeto proiettivo canonico di coordinate $[x : y : z : w]$. Considerare l'applicazione definita da:

$$\varphi : [x : y : z : w] \mapsto [-3x + y + z + w : x - 3y + z + w : x + y - 3z + w : x + y + z - 3w].$$

- a) Determinare se si tratta di un'applicazione ben definita $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$
- b) Determinare se si tratta di una proiettività, o di una trasformazione proiettiva degenera.
- c) Nel caso si tratti di una trasformazione proiettiva degenera determinare il luogo dove è definita, determinare se si tratta di una proiezione e in caso affermativo determinarne il centro e l'immagine.
- d) Considerare la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ di equazione $X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 0$, sia $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ il sottoinsieme $\varphi^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{Q}))$. Mostrare che esiste una quadrica $\mathcal{Q}'$ tale che $X \subset \text{Supp}(\mathcal{Q}')$. Scrivere un'equazione di $\mathcal{Q}'$, determinare se $\mathcal{Q}'$ è degenera.

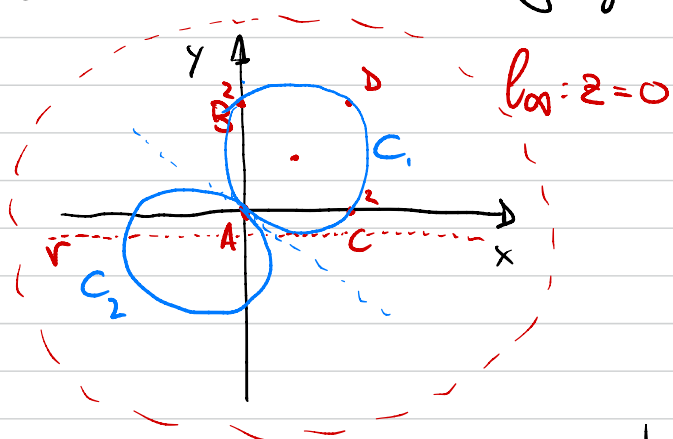
Esercizio 1. In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con riferimento proiettivo canonico, considerare i seguenti punti $A = [0 : 0 : 1]$, $B = [0 : 4 : 2]$, $C = [6 : 0 : 3]$, $D = [8 : 8 : 4]$.

- Considerare la famiglia $\mathcal{F} := \{C \text{ conica di } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C, D \in \text{Supp}(C), C \text{ è tangente alla retta } r : Z + (1 + \sqrt{2})Y = 0\}$. Determinare se $\mathcal{F}$ è un sistema lineare di coniche.
- Determinare tutte le coniche degeneri nella famiglia $\mathcal{F}$. Scrivere un'equazione di una conica C_1 non degenera della famiglia $\mathcal{F}$.
- Sia C_2 la conica di equazione $X^2 + Y^2 + 2XZ + 2YZ = 0$. Determinare l'intersezione con molteplicità di C_1 e C_2 .
- Considerare la retta r di cui sopra, sia $U = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus r$. Descrivere delle coordinate affini di U e le rispettive applicazioni $j : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow U$ e $\vartheta : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$. Determinare un'equazione della conica affine $C_2 \cap U$ nelle coordinate affini scelte, e classificarla.

Svolgimento: ① A, B, C, D sono 4 punti in posizione generale.

La retta r non contiene nessuno dei 4 punti.

La famiglia $\mathcal{F}' = \{C \text{ conica in } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \text{ per } A, B, C, D\}$ è un fascio di coniche. L'ulteriore condizione di tangenza è quadratica e non lineare, mostriamo che $\mathcal{F}$ non è un sistema lineare di coniche mostrando che contiene 2 punti distinti (ed è diverso da $\mathcal{F}'$):



2) tra le coniche degeneri di $\mathcal{F}'$ vediamo che

$$D_1 := L(A, C) + L(B, D)$$

è tangente alla retta r in $[1 : 0 : 0]$

mentre le altre 2 coniche degeneri

$$L(A, B) + L(C, D) \text{ e } L(A, D) + L(B, C) \text{ hanno}$$

intersezione con r in 2 punti distinti quindi non sono tangenti.

Inoltre osserviamo che nel disegno sopra la circonferenza

affine $C : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ è tangente alla retta r , quindi

$$C : x^2 + y^2 - 2xz - 2yz = 0 \text{ è una conica non degenera}$$

di $\mathcal{F}$. Quindi $\mathcal{F}$ non è un fascio né un sistema lineare.

In effetti: $\Gamma \cap C_1 = \begin{cases} z = -(1+\sqrt{2})y \\ x^2 + y^2 - 2xz - 2yz = 0 \end{cases}$

$$\leadsto x^2 + 2(1+\sqrt{2})xy + (1+2(1+\sqrt{2}))y^2 = 0$$

$$\Delta/4 = (1+\sqrt{2})^2 - (3+2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \Gamma \text{ è tangente a } C_1 //$$

(b) Abbiamo visto sopra che C_1 è una sola conica degenera nella famiglia $\mathcal{F}$, la conica

$$\mathcal{D} = L(A, B) + L(C, D) : x(x-2z) = 0$$

Una conica non degenera (l'unica altra conica in $\mathcal{F}$, poiché sappiamo che la condizione imposta in $\mathcal{F}'$ è quadratico) è $C_1: x^2 + y^2 - 2xz - 2yz = 0$.

(c) $C_2: x^2 + y^2 + 2xz + 2yz = 0$

Consideriamo il fascio di coniche

$$\mathcal{F}(C_1, C_2) = \{(\lambda+\mu)x^2 + (\lambda+\mu)y^2 + 2(\lambda-\mu)xz + 2(\lambda-\mu)yz \mid [\lambda:\mu] \in \mathbb{P}_C\}$$

Una conica degenera nel fascio è $C_3: z(x+y) = 0$

Calcoliamo $C_3 - C_1$:

$$[z=0] \cap C_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \leadsto [z=0] \cdot C_1 = [1:i:0] + [1:-i:0]$$

$$[x+y=0] \cap C_1 : \begin{cases} x+y=0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y=-x \\ x^2=0 \end{cases} \leadsto [x+y=0] \cdot C_1 = 2[0:0:1]$$

$$\Rightarrow C_1 \cdot C_2 = 2[0:0:1] + [1:i:0] + [1:-i:0]$$

① Sia $r: z + (1 + \sqrt{2})y = 0$

Sia $U = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^2 \mid z + (1 + \sqrt{2})y \neq 0\}$

Consideriamo $[x:y:z] \mapsto \left(\frac{x}{z + (1 + \sqrt{2})y}, \frac{y}{z + (1 + \sqrt{2})y} \right)$

$U \longrightarrow \mathbb{A}_\mathbb{C}^2$

vediamo che quest'è invertibile con inverse data da

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{x}{z + (1 + \sqrt{2})y} \\ t &= \frac{y}{z + (1 + \sqrt{2})y} \\ 1 - (1 + \sqrt{2})t &= \frac{z + (1 + \sqrt{2})y - (1 + \sqrt{2})y}{z + (1 + \sqrt{2})y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{A}_\mathbb{C}^2 \xrightarrow{j} U$$

$(s, t) \mapsto [s : t : 1 - (1 + \sqrt{2})t]$

quindi j e ϑ determinano le coordinate

$s = \frac{x}{z + (1 + \sqrt{2})y}$ e $t = \frac{y}{z + (1 + \sqrt{2})y}$ su U .

Se $x = s$, $y = t$ e $z = 1 - (1 + \sqrt{2})t$

Allora $C_2 \cap U$ è data dall'equazione

$$s^2 + t^2 + 2s(1 - (1 + \sqrt{2})t) + 2t(1 - (1 + \sqrt{2})t) = 0$$

$$s^2 + (1 - 2 - 2\sqrt{2})t^2 + 2(1 + \sqrt{2})st + 2s + 2t = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & -1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ è un conico e centro non degeneri in $\mathbb{A}_\mathbb{C}^2$.

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ dei polinomi reali di grado al più 2, e la seguente funzione:

$$q: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P(X) \mapsto P(2)^2 - P'(0)^2 - 2P''(1)P(3),$$

dove $P'(X)$ è la derivata di $P(X)$ e $P''(X)$ la derivata seconda.

- Mostrare che q è una forma quadratica, e descrivere la forma bilineare simmetrica associata β .
- Determinare se β è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, o indefinita.
- Determinare il nucleo di β e il cono isotropo di β .
- Determinare la segnatura di β .

Svolgimento: ① Osserviamo che $\mathbb{R}[X]^{\leq 2} \xrightarrow{P(X) \mapsto P'(X)} \mathbb{R}[X]^{\leq 1}$ e che $2(\mathbb{R}[X]^{\leq 2}) \subseteq \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$.

Segue che l'applicazione

$$\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(P(X), Q(X)) \mapsto P(2)Q(2) - P'(0)Q'(0) - P''(1)Q(3) - Q''(1)P(3)$$

è una forma bilineare, ed è simmetrica.

Poiché $q(P(X)) = \beta(P(X), P(X))$ allora q è una forma quadratica e β è la forma bilineare associata a q .

ALTERNATIVAMENTE: Scegliamo come base $\{1, x, x^2\}$

$$\text{Allor, } P(x) = a + bx + cx^2 \quad P'(x) = b + 2cx \quad P''(x) = 2c$$

$$\text{e } q(P(x)) = (a + 2b + 4c)^2 - b^2 - 4c(a + 3b + 9c) =$$

$$a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 4ab + 8ac + 16bc - b^2 - 4ac - 12bc - 36c^2 =$$

$$= a^2 + 3b^2 - 20c^2 + 4ab + 4ac + 4bc \quad \text{è un pol. omogeneo deg. 2}$$

② Poiché $q(1) = 1 > 0$ e $q(x-2) = -1 < 0$

allora β è indefinita

③ Poiché $\beta(1, 1) = 1$ $\beta(1, x) = 2$ $\beta(1, x^2) = 4 - 2 = 2$

$$\beta(x, x) = 3 \quad \beta(x, x^2) = 8 - 6 = 2 \quad \beta(x^2, x^2) = 16 - 36 = -20$$

la matrice B di β nella base scelta è $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -20 \end{pmatrix}$
 $\det(B) = 20 > 0$,

Quindi il nucleo di β è $\{0\}$ e
il cono isotropo in $V \cong \mathbb{R}^3$ è una quadrica degenera,
di equazione $a^2 + 3b^2 - 20c^2 - 4ab - 4ac - 4bc = 0$.

Il cono isotropo contiene rette, ma non piani,
infatti un sottospazio isotropo ha dimensione ≤ 1
(vedi segnatura più sotto).

d) Per calcolare la segnatura, osserviamo che la
forma β è indefinita e di rango massimo ($\text{rg}(B) = 3$)
Quindi la segnatura è $(2, 1)$ oppure $(1, 2)$.

Poiché $\det(B) > 0$ deduciamo $\text{sgn}(\beta) = (1, 2)$

//

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ lo spazio proiettivo tridimensionale con riferimento proiettivo canonico di coordinate $[x : y : z : w]$. Considerare l'applicazione definita da:

$$\varphi: [x : y : z : w] \mapsto [-3x + y + z + w : x - 3y + z + w : x + y - 3z + w : x + y + z - 3w].$$

- Determinare se si tratta di un'applicazione ben definita $\varphi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.
- Determinare se si tratta di una proiettività, o di una trasformazione proiettiva degenera.
- Nel caso si tratti di una trasformazione proiettiva degenera determinare il luogo dove è definita, determinare se si tratta di una proiezione e in caso affermativo determinarne il centro e l'immagine.
- Considerare la quadrica Q di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ di equazione $X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 0$, sia $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ il sottoinsieme $\varphi^{-1}(\text{Supp}(Q))$. Mostrare che esiste una quadrica Q' tale che $X \subset \text{Supp}(Q')$. Scrivere un'equazione di Q' , determinare se Q' è degenera.

Svolgimento:

① L'applicazione φ è indotta da un'applicazione lineare

$\tilde{\varphi}: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ con matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Chiaramente il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ è nel nucleo, inoltre $\text{rg}(A) = 3$ poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

Quindi $\ker(\tilde{\varphi}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Quindi φ non è ben definita su tutto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, ma solo su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \setminus \{[1 : 1 : 1 : 1]\}$.

② Da quanto visto sopra, si tratta di una trasformazione proiettiva degenera.

③ Poiché il rango di $\tilde{\varphi}$ è 3, l'immagine di φ è un iperpiano, e una sua equazione è un'equazione soddisfatta dai punti $[-3 : 1 : 1 : 1], [1 : -3 : 1 : 1], \dots$

$$\text{Im}(\varphi): x + y + z + w = 0.$$

Quindi se φ è una proiezione, deve essere la proiezione sul piano $\pi: x+y+z+w=0$, di centro $[1:1:1:1]$.

Scriviamo la proiezione $\varphi: \mathbb{P}^3 \setminus \{[1:1:1:1]\} \rightarrow \pi \subset \mathbb{P}^3$ così definita:
 Sia $P_1 = [1:1:1:1]$. Sia $P = [x_0: y_0: z_0: w_0] \in \mathbb{P}^3 \setminus \{[1:1:1:1]\}$

$$\text{Allora } h(P_1, P) = \{ [\lambda \underset{x}{x_0} + \mu \underset{y}{y_0} + \lambda \underset{z}{z_0} + \mu \underset{w}{w_0}] / [\lambda: \mu] \in \mathbb{P}^1 \}$$

$$\text{e } \varphi(P) = h(P_1, P) \cap \pi:$$

$$\lambda x_0 + \mu + \lambda y_0 + \mu + \lambda z_0 + \mu + \lambda w_0 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{4}(x_0 + y_0 + z_0 + w_0)\lambda$$

$$\text{poniamo } \lambda = -4 \text{ e } \mu = x_0 + y_0 + z_0 + w_0 \text{ e}$$

otteniamo

$$\varphi(P) = [-3x_0 + y_0 + z_0 + w_0 : \dots : x_0 + y_0 + z_0 - 3w_0] = \varphi(P).$$

Quindi φ è effettivamente la proiezione descritta, di centro $[1:1:1:1]$ e immagine $\pi: x+y+z+w=0$.

$$\textcircled{d} \text{ Poiché } \text{Supp}(Q) = \{ [x:y:z:w] \in \mathbb{P}^3_C / x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \}$$

Allora

$$\varphi'(\text{Supp}(Q)) = \{ [x:y:z:w] / [-3x+y+z+w : \dots : x+y+z-3w] \in \text{Supp}(Q) \}$$

è definito dai punti in $\mathbb{P}^3 \setminus \{[1:1:1:1]\}$ di coordinate

$[x:y:z:w]$ tali che

$$(-3x+y+z+w)^2 + (x-3y+z+w)^2 + (x+y-3z+w)^2 + (x+y+z-3w)^2 = 0$$

quindi sono contenuti nella quadrica di equazione

$$12x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12w^2 - 8xy - 8xz - 8xw - 8yz - 8yw - 8zw = 0$$

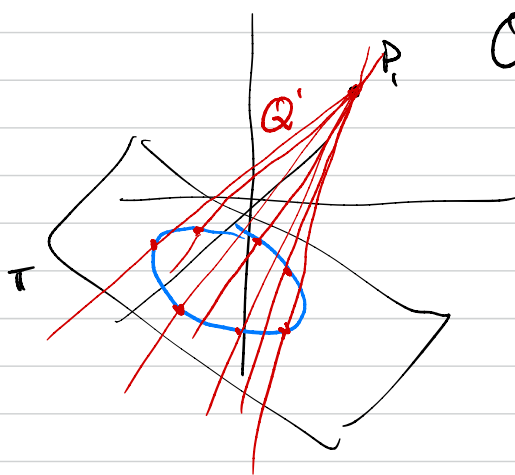
Questa quadrica ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

che è degenera per quanto visto sopra.

OSSERVAZIONI =

- Geometricamente: Se φ è la proiezione di centro $P_1 = [1:1:1:1]$ allora $\varphi^{-1}(\text{Supp}(Q)) = \varphi^{-1}(\text{Supp}(Q) \cap \pi)$ è la controimmagine per la proiezione φ di una conica non degenera contenuta in π .



Q' è quindi una quadrica a cono (degenera) in $\mathbb{P}^3$, con vertice in P_1 .

- Algebricamente: la quadrica Q ha matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ quindi la quadrica Q' ha matrice ${}^t A \Sigma A$, che è degenera in quanto sappiamo che $\det(A) = 0$.