GEOMETRIA 2 - Parte A

Corso di Laurea in Matematica

Appello 18/01/2022 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con riferimeto proiettivo canonico, considerare i seguenti punti $A = [0:0:1]$, $B = [0:4:2]$, $C = [6:0:3]$, $D = [8:8:4]$.

a) Considerare la famiglia $\mathcal{F} := \{\mathcal{C} \text{ conica di } \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid A, B, C, D \in \mathrm{Supp}(\mathcal{C})\ ,\ \mathcal{C} \text{ è tangente alle retta } r : Z + (1+\sqrt{2})Y = 0\}$. Determinare se $\mathcal{F}$ è un sistema lineare di coniche.

b) Determinare tutte le coniche degeneri nella famiglia $\mathcal{F}$. Scrivere un'equazione di una conica C_1 non degenere della famiglia $\mathcal{F}$.

c) Sia C_2 la conica di equazione $X^2 + Y^2 + 2XZ + 2YZ = 0$. Determinare l'intersezione con molteplicità di C_1 e C_2.

d) Considerare la retta r di cui sopra, sia $U = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus r$. Descrivere delle coordinate affini di U e le rispettive applicazioni $j\colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to U$ e $\vartheta\colon U \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Determinare un'equazione della conica affine $C_2 \cap U$ nelle coordinate affini scelte, e classificarla.

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[X]^{\leqslant 2}$ dei polinomi reali di grado al più 2, e la seguente funzione:

$$\begin{aligned} q\colon V &\to \mathbb{R} \\ P(X) &\mapsto P(2)^2 - P'(0)^2 - 2P''(1)P(3)\ , \end{aligned}$$

dove $P'(X)$ è la derivata di $P(X)$ e $P''(X)$ la derivata seconda.

a) Mostrare che q è una forma quadratica, e descrivere la forma bilineare simmetrica associata β.

b) Determinare se β è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, o indefinita.

c) Determinare il nucleo di β e il cono isotropo di β.

d) Determinare la segnatura di β.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ lo spazio proiettivo tridimensionale con riferimeto proiettivo canonico di coordinate $[x:y:z:w]$. Considerare l'applicazione definita da:

$$\varphi\colon [x:y:z:w] \mapsto [-3x+y+z+w : x-3y+z+w : x+y-3z+w : x+y+z-3w]\ .$$

a) Determinare se si tratta di un'applicazione ben definita $\varphi\colon \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

b) Determinare se si tratta di una proiettività, o di una trasformazione proiettiva degenere.

c) Nel caso si tratti di una trasformazione proiettiva degenere determinare il luogo dove è definita, deteminare se si tratta di una proiezione e in caso affermativo determinarne il centro e l'immagine.

d) Considerare la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ di equazione $X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 0$, sia $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ il sottoinsieme $\varphi^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathcal{Q}))$. Mostrare che esiste una quadrica $\mathcal{Q}'$ tale che $X \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{Q}')$. Scrivere un'equazione di $\mathcal{Q}'$, determinare se $\mathcal{Q}'$ è degenere.