
GEOMETRIA 2 - Parte A
Corso di Laurea in Matematica
Appello 26/11/2021 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ dei polinomi di grado al più 3, e la seguente funzione:

$$q: V \rightarrow \mathbb{R}, \\ P(X) \mapsto P(0)^2 + P(1)^2 + P(-1)^2.$$

- a) Mostrare che q è una forma quadratica, e descrivere la forma bilineare simmetrica associata β .
- b) Determinare se β è definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, o indefinita.
- c) Determinare il nucleo di β e il cono isotropo di β .
- d) Determinare la segnatura di β e trovare una base di V diagonalizzante per β .

Esercizio 2. Considerare le seguenti coniche nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ con riferimento standard:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : X^2 + 2X + Y^2 &= 0 \\ \mathcal{C}_2 : X^2 + 2X - Y^2 &= 0 \\ \mathcal{C}_3 : X^2 + 2X - Y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

- a) Per ogni conica $\mathcal{C}_i$ determinare se si tratta di una conica a centro e in caso affermativo trovare il centro.
- b) Per ogni conica $\mathcal{C}_i$ determinarne il tipo, la forma canonica, e trovare un riferimento euclideo in cui la conica sia in forma canonica.
- c) Per ogni conica $\mathcal{C}_i$ scrivere un'equazione della proiettificazione $\overline{\mathcal{C}_i}$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.
- d) Per ogni conica $\overline{\mathcal{C}_i}$ considerare l'equazione trovata sopra come un'equazione a coefficienti complessi di una conica $\mathcal{D}_i$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Determinare le seguenti intersezioni con molteplicità: $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$.

Esercizio 3. Siano P_1 e P_2 due punti distinti di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$. Considerare la famiglia di iperpiani di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$:

$$\Lambda = \{H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5 \mid H \text{ iperpiano che contiene } P_1 \text{ e } P_2\}$$

- a) Determinare se Λ è un sistema lineare, motivando la risposta.
- b) Calcolare la dimensione $\dim \Lambda$.
- c) Determinare se $\bigcap_{H \in \Lambda} H$ è un sottospazio proiettivo, e in caso affermativo calcolarne la dimensione.