GEOMETRIA 2 - Parte A

Corso di Laurea in Matematica

Appello 20/09/2021 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ lo spazio proiettivo reale di dimensione 4 dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4]$. Si considerino i sottospazi proiettivi S_1 e S_2 definiti dalle equazioni

$$S_1\colon X_1 + X_2 = X_3 - X_4 = X_0 = 0\ ,\ S_2\colon X_2 = X_3 + X_4 = 0\ ,$$

e il sottospazio S_3 caratterizzato dal fatto di essere il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ che contiene i punti

$$A = [0 : 1 : 0 : 0 : 0],\ B = [3 : 0 : 6 : 0 : 0],\ C = [0 : 0 : 1 : 0 : 0],\ D = [0 : 0 : 0 : 1 : 1]\ .$$

a) Calcolare la dimensione dei sottospazi S_1, S_2, S_3.

b) Calcolare, per ogni coppia S_i, S_j con $i \neq j$, la dimensione di $S_i \cap S_j$ e di $L(S_i, S_j)$.

c) Scrivere le equazioni, nel riferimento proiettivo standard, della proiezione su S_2 di centro S_1.

Esercizio 2. Considerare i 2 punti $A = [0 : 0 : 1], B = [2 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sul piano proiettivo complesso, e le 2 rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ determinate dalle seguenti equazioni: $r_1 : X = 0,\ r_2 : X - 2Z = 0$. Si consideri l'insieme di coniche proiettive in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{C} \text{ coninca in } \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \mid \mathcal{C} \text{ è tangente alle rette } r_1, r_2 \text{ e passa per i punti } A, B\}$$

a) Determinare se $\mathcal{F}$ è un fascio di coniche.

b) Determinare due coniche non-singolari C_1 e C_2 nell'insieme $\mathcal{F}$.

c) Determinare l'intersezione di C_1 e C_2 con molteplcità.

d) L'insieme $\mathcal{F}$ contiene coniche singolari? Determinarle tutte.

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[X]^{\leqslant 3}$ dei polinomi di grado al più 3, e la seguente funzione

$$q\colon V \to \mathbb{R}\ ,$$
$$P(X) \mapsto P(0)^2 + \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt$$

a) Mostrare che q è una forma quadratica, e descrivere la forma bilineare associata β.

b) Determinare la matrice della forma bilineare β in una base di $V = \mathbb{R}[X]^{\leqslant 3}$.

c) Determinare la segnatura di β.