
GEOMETRIA 2 - Parte A
Corso di Laurea in Matematica
Appello 08/07/2021 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. Sia $k = \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ il campo con 3 elementi. E sia $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$ lo spazio proiettivo canonico di dimensione n sul campo k .

- a) Quanti elementi ha $\mathbb{P}_k^1$? Elencarli tutti.
- b) Quanti elementi ha $\mathbb{P}_k^2$? E $\mathbb{P}_k^3$? Motivare la risposta.
- c) Quante rette proiettive ci sono in $\mathbb{P}_k^2$?
- d) Facoltativo: Sia $q \in \mathbb{N}$ un numero primo. Sia $F = \mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ il campo con q elementi. Quante rette proiettive ci sono in $\mathbb{P}_F^2$?

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale complesso $V = \mathbb{C}^2$. E sia $V_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale V considerato come spazio vettoriale reale (si considera solo la moltiplicazione per scalari reali). Considerare la seguente applicazione

$$h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$
$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (\overline{x_1} \quad \overline{x_2}) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- a) Mostrate che h è una forma hermitiana su V .
- b) Chiamare $V_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale V considerato come spazio vettoriale reale (si considera solo la moltiplicazione per scalari reali), e considerare la seguente applicazione:

$$s: V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(v_1, v_2) \mapsto \operatorname{Re}(h(v_1, v_2)) ,$$

dove Re è la parte reale di un numero complesso. Dimostrare che s è una forma bilineare simmetrica.

- c) Determinare una base di $V_{\mathbb{R}}$. Determinare una matrice della forma bilineare simmetrica s nella base scelta. Determinare se la forma bilineare s è non degenera.
- d) Facoltativo: Trovare una base di $V_{\mathbb{R}}$ diagonalizzante per s , e calcolarne la segnatura.

Esercizio 3. Si considerino le rette in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ determinate dalle seguenti equazioni: $r_1 : x = 0$, $r_2 : y = 0$, $r_3 : z = 0$, $r_4 : 2x + 2y - z = 0$. Si consideri l'insieme di coniche proiettive in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$:

$$\mathcal{F} := \{C \text{ conica in } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid C \text{ è tangente alle rette } r_1, r_2, r_3, r_4\}$$

- a) L'insieme $\mathcal{F}$ è un fascio di coniche? L'insieme $\mathcal{F}$ contiene coniche singolari? Motivare la risposta.
- b) Mostrare che la conica C di equazione $X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ = 0$ appartiene all'insieme $\mathcal{F}$. Determinare se la conica C è singolare.
- c) Considerare la conica affinizzata di C nell'aperto affine $U = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid z \neq 0\}$. Determinare di che conica si tratta, scriverne l'equazione, e disegnarne la parte reale (in $\mathbb{R}^2$), insieme alle 4 rette r_1, r_2, r_3, r_4 .