
GEOMETRIA 2 - Parte A
Corso di Laurea in Matematica
Appello 21/01/2021 - Mistretta / Longo

Esercizio 1. Considerare 5 punti distinti $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ sul piano proiettivo complesso.

- a) Supponendo che comunque si scelgano 4 punti tra $P_1, \dots, P_5$ questi non sono colineari, mostrare che esiste un'unica conica per $P_1, \dots, P_5$.
- b) Nel caso sopra è possibile che la conica sia degenera? Se sì, quando?
- c) Nel caso in cui vi siano esattamente 4 punti tra $P_1, \dots, P_5$ che giacciono su una stessa retta, quante coniche ci sono passanti per i 5 punti $P_1, \dots, P_5$?
- d) Mostrare che in ogni caso la famiglia $\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \text{ conica in } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid P_1, \dots, P_5 \in \text{Supp}(\mathcal{C})\}$ è un sistema lineare, e calcolarne la dimensione in funzione della disposizione dei 5 punti.

Esercizio 2. Considerare i 3 punti $A = [0 : 0 : 1], B = [2 : 0 : 1], C = [1 : 1 : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ sul piano proiettivo complesso.

- a) Determinare se la famiglia $\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \text{ conica in } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C \in \text{Supp}(\mathcal{C}), \text{ e } \mathcal{C} \text{ tangente alla retta } Y - Z = 0\}$ è un fascio di coniche.
- b) Determinare una conica degenera $\mathcal{C}_1$ e una non degenera $\mathcal{C}_2$ nella famiglia $\mathcal{F}$, calcolare la loro intersezione (con molteplicità), e “disegnarle” sul piano.
- c) Determinare se la famiglia $\mathcal{G} = \{\mathcal{C} \text{ conica in } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid A, B, C \in \text{Supp}(\mathcal{C}), \text{ e } \mathcal{C} \text{ tangente alla retta } Y + Z = 0\}$ è un fascio di coniche.
- d) Determinare una conica degenera $\mathcal{D}_1$ e una non degenera $\mathcal{D}_2$ nella famiglia $\mathcal{G}$ e calcolare la loro intersezione (con molteplicità), e “disegnarle” sul piano. Descrivere la differenza tra la famiglia $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. A cosa è dovuta?
- e) Considerare la retta proiettiva $H = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid y - z = 0\}$, e l'insieme $U = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus H$. Descrivere le mappe $j: \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow U$ e $j^{-1}: U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ determinate da un riferimento affine su U . Considerare la conica non degenera $\mathcal{C}_2$ trovata al punto (b), scrivere un'equazione di $\mathcal{C}_2 \cap U$ nel riferimento affine scelto, e determinare di che tipo di conica affine si tratta.

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale reale $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più 2. Sia

$$\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(P(X), Q(X)) \mapsto \int_{-1}^1 tP(t)Q(t)dt$$

- a) Determinare se β è una forma bilineare e se è simmetrica, scrivere la matrice di β in una base di V .
- b) Determinare la segnatura di β .
- c) Trovare uno spazio isotropo per β di dimensione massimale.