

Foglio di Esercizi N. 11

Geometria 2 - Parte A

Esercizio 1. Sia data $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zt + t^2$.

- i.* Mostrare che si tratta di una forma quadratica e scrivere la matrice della forma bilineare β associata.
- ii.* Mostrare che β è un prodotto scalare.
- iii.* Sia S l'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (0, 1, 0, 0)$, $u_2 = (2, 0, 1, 0)$ e $u_3 = (-1, 0, 0, 1)$. Determinare generatori ed equazioni cartesiane di $S^{\perp_\beta}$.

Esercizio 2. Sia data la forma quadratica $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz - 2yz + 2z^2$ su $\mathbb{R}$.

- i.* Scrivere la matrice della forma bilineare associata.
- ii.* Determinare una base in cui la matrice assume forma canonica, il rango e la segnatura.
- iii.* Determinare il cono isotropo. In questo caso è un sottospazio? In generale?

Esercizio 3. Considerare lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ dei polinomi di grado minore o uguale a tre e la seguente funzione

$$q: V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$P(X) \mapsto P(0)^2 + \int_{-1}^1 P(t)^2 dt$$

- i.* Mostrare che q è una forma quadratica e determinare la forma bilineare β associata.
- ii.* Determinare la matrice di β in una base di V .
- iii.* Determinare la segnatura di β .

Esercizio 4. Sia K un campo e siano A , B e C punti di $\mathbb{P}_K^2$ in posizione generale. Sia data una proiezione $f: \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ tale che $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = A$. Si dimostri che:

- i.* Non esiste una retta di punti fissi.
- ii.* $f^3 = id_{\mathbb{P}_K^2}$.
- iii.* Esiste almeno una conica $\mathcal{Q}$ non degenera passante per A , B e C tale che $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ lo spazio proiettivo reale di dimensione 4 dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$. Si considerino i sottospazi proiettivi S_1 e S_2 definiti dalle equazioni

$$S_1: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e il sottospazio $S_3 = L(A, B, C, D)$ dove

$$A = [0 : 1 : 0 : 0 : 0], \quad B = [3 : 0 : 6 : 0 : 0], \quad C = [0 : 0 : 1 : 0 : 0] \text{ e } D = [0 : 0 : 0 : 1 : 1]$$

- i. Calcolare la dimensione dei sottospazi S_1 , S_2 e S_3 .
- ii. Per ogni coppia S_i, S_j con $i \neq j$ calcolare la dimensione di $S_i \cap S_j$ e $L(S_i, S_j)$.
- iii. Scrivere le equazioni nel sistema di riferimenti proiettivo standard della proiezione su S_2 di centro S_1 .

Esercizio 6. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ trovare la conica passante per $P = [1, -1, 0]$ con tangente $r_P : 3x_0 + 3x_1 + 5x_2 = 0$, per $Q = [1, 2, 1]$ con tangente $r_Q : x_0 - x_1 + x_2 = 0$ e per $R = [1, 2, -3]$.

Esercizio 7. Si consideri il fascio di coniche

$$2\lambda x_0^2 - (\lambda + \mu)x_1^2 - (\lambda - \mu)x_2^2 - 2\mu x_0 x_1 - 2\mu x_0 x_2$$

- i. Determinare le coniche degeneri.
- ii. Determinare l'intersezione tra due coniche generiche del fascio.
- iii. Dimostrare che esiste una sola retta tangente a tutte le coniche del fascio.
- iv. Determinare tutte le coniche del fascio che nella carta affine U_0 sono parabole.

Esercizio 8. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche degeneri in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tale che non esista una retta che sia una componente irriducibile di tutte le coniche del fascio. Si provi che l'insieme dei punti di intersezione di due coniche qualsiasi di $\mathcal{F}$ è formato da un solo punto e che il fascio contiene esattamente due coniche doppiamente degeneri.

Esercizio 9. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ siano dati i punti $P_1 = [0, 1, 2]$, $P_2 = [0, 0, 1]$, $P_3 = [2, 1, 2]$ e $P_4 = [3, 0, 1]$. Si determini, se esiste, una conica passante per P_1, P_2, P_3 e P_4 e tangente in P_3 alla retta di equazione $x_0 - x_2 = 0$.

Esercizio 10. Si considerino le rette in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ determinate dalle seguenti equazioni: $r_1 : x = 0$, $r_2 : y = 0$, $r_3 : z = 0$, $r_4 : 2x + 2y - z = 0$. Si consideri l'insieme di coniche proiettive

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \text{ conica} \mid \mathcal{C} \text{ è tangente alle rette } r_1, r_2, r_3 \text{ e } r_4\}$$

- i. L'insieme $\mathcal{F}$ è un fascio di coniche? L'insieme $\mathcal{F}$ contiene coniche singolari? Motivare la risposta.

- ii. Mostrare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$ appartiene all'insieme $\mathcal{F}$. Determinare se la conica $\mathcal{C}$ è singolare.
- iii. Considerare la conica affinizzata di $\mathcal{C}$ nell'aperto affine $U = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid z \neq 0\}$. Determinare di che conica si tratta, scriverne l'equazione, e disegnarne la parte reale (in $\mathbb{R}^2$), insieme alle 4 rette r_1, r_2, r_3 e r_4 .

Esercizio 11. Considerare i due punti $A = [0 : 0 : 1]$ e $B = [2 : 0 : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ nel piano proiettivo complesso e le due rette $r_1 : x = 0$ e $r_2 : x - 2z = 0$. Si consideri l'insieme di coniche proiettive

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \text{ conica in } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid \mathcal{C} \text{ è tangente alle rette } r_1 \text{ e } r_2 \text{ e passa per i punti } A \text{ e } B\}$$

- i. Determinare se $\mathcal{F}$ è un fascio di coniche.
- ii. Determinare due coniche non singolari di $\mathcal{F}$.
- iii. Determinare l'intersezione di queste due coniche non singolari con molteplicità.
- iv. $\mathcal{F}$ contiene coniche singolari? Nel caso determinarle tutte.