

Foglio di Esercizi N.10

Geometria 2 - parte A

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{Q}$, con riferimento proiettivo canonico $RP(\mathbb{E})$. Sono assegnate in $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ le coniche proiettive $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ aventi rispettivamente equazioni:

$$F = 4x_0^2 - x_1^2 = 0, \quad G = x_0^2 - 4x_2^2 = 0.$$

- i. Verificare che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono proiettivamente equivalenti, determinando una proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ tale $f^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{D}$.
- ii. Scrivere le equazioni di una proiettività di $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ che trasforma il supporto di $\mathcal{C}$ nel supporto di $\mathcal{D}$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento proiettivo canonico $RP(\mathbb{E})$. Verificare che le due coniche proiettive $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ aventi rispettivamente equazioni:

$$F_1 = 2x_0^2 - x_1^2 = 0, \quad F_2 = x_1^2 - 3x_2^2 = 0$$

sono proiettivamente equivalenti. Determinare le equazioni di una proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tale che $f^{-1}\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P}_k^2$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo k , con riferimento proiettivo canonico $RP(\mathbb{E})$. È assegnata la conica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione:

$$F = -x_0^2 + x_1^2 - 2x_2^2 = 0.$$

Rispetto ai campi $k = \mathbb{R}$ e $k = \mathbb{C}$:

- i. Determinare il tipo di $\mathcal{C}$ e scrivere l'equazione della forma canonica ad essa proiettivamente equivalente.
- ii. Determinare un riferimento proiettivo $RP(\mathbb{F})$ di $\mathbb{P}_k^2$ rispetto a cui $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento proiettivo canonico $RP(\mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica proiettiva in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ di equazione:

$$F = x_0^2 + 4x_0x_1 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

- i. Indicare il tipo di $\mathcal{C}$ e determinare un riferimento proiettivo nel quale $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.

- ii. Determinare le equazioni di una proiettività f che trasforma il supporto di $\mathcal{C}$ nel supporto della forma canonica $\mathcal{D}$ proiettivamente equivalente a $\mathcal{C}$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{P}_k^2, RP(\mathbb{E})$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo k , con riferimento proiettivo canonico. Sia $\mathcal{C}$ la conica proiettiva di equazione:

$$F = 4x_0x_1 = 0.$$

- i. Posto $k = \mathbb{C}$, determinare un riferimento proiettivo $RP(\mathbb{F})$ di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ nel quale $\mathcal{C}$ ha l'equazione di una forma canonica.
- ii. Posto $k = \mathbb{R}$, classificare $\mathcal{C}$, determinando una proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che trasformi il supporto di $\mathcal{C}$ nel supporto della forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, RP(\mathbb{E})$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento proiettivo canonico. Sia $\mathcal{C}$ la conica proiettiva di equazione:

$$F = 2x_0x_1 - x_2^2 = 0.$$

- i. Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica generale a punti reali.
- ii. Determinare un riferimento proiettivo $RP(\mathbb{F})$ di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ rispetto a cui $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.
- iii. Determinare le equazioni di una proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tale che $f^{-1}\mathcal{C}$ è una forma canonica di $\mathcal{C}$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, RP(\mathbb{E})$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento proiettivo canonico. Sono assegnate le due coniche proiettive reali $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ aventi equazioni:

$$F_1 = x_0^2 - 2x_2^2 = 0, \quad F_2 = x_1^2 - 4x_2^2 = 0.$$

Verificare che $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono proiettivamente equivalenti e determinare una proiettività $f \in \mathbf{PGL}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$ tale che $f^{-1}\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, RP(\mathbb{E})$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento proiettivo canonico. È assegnata in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C}_{\lambda} : \lambda x_0^2 - 2\lambda x_1x_2 + x_1^2 = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- i. Verificare che $\mathcal{C}_{\lambda}$ è una conica generale $\iff \lambda \neq 0$.
- ii. Determinare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{C}_{\lambda}$ è una conica generale a punti reali.

Esercizio 9. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ di equazione:

$$x^2 - 2xy + i = 0.$$

- i.* Determinarne il tipo e indicare l'equazione della forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa affinementemente equivalente.
- ii.* Scrivere le equazioni di un'affinità f di $A_{\mathbb{C}}^2$ tale che $f^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{D}$.
- iii.* Determinare un riferimento affine in cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica.

Esercizio 10. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2, RA(O, \mathbb{E})$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{C}$, con riferimento affine canonico. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ avente equazione:

$$x^2 + 2ixy - y^2 + x - y = 0.$$

- i.* Classificare $\mathcal{C}$ e scrivere l'equazione della forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa affinementemente equivalente.
- ii.* Determinare le equazioni di un'affinità ℓ tale che $\ell^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{D}$.
- iii.* Determinare un riferimento affine nel quale $\mathcal{C}$ si scriva in forma canonica.

Esercizio 11. Sia $\mathbb{A}_k^2, RA(O, \mathbb{E})$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo k , con riferimento affine canonico. Si consideri la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4y + 6 = 0$$

Rispetto ai campi $k = \mathbb{C}$ e $k = \mathbb{R}$:

- i.* Classificare $\mathcal{C}$ e scrivere l'equazione della forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa affinementemente equivalente.
- ii.* Ridurre $\mathcal{C}$ a forma canonica, determinando un riferimento affine rispetto al quale $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.

Esercizio 12. Sia $\mathcal{C}$ una parabola affine reale. Verificare che, se $\mathcal{C}$ è degenere, $\mathcal{C}$ ha infiniti centri di simmetria, mentre se $\mathcal{C}$ è generale non ha alcun centro di simmetria.

Esercizio 13. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2, RA(O, \mathbb{E})$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico. Sia $\mathcal{C}$ la conica affine di equazione:

$$x^2 - 2y + 3 = 0.$$

- i.* Classificare $\mathcal{C}$ e scrivere l'equazione della forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa affinementemente equivalente.
- ii.* Determinare un'affinità di $A_{\mathbb{R}}^2$ che trasforma il supporto di $\mathcal{C}$ nel supporto di $\mathcal{D}$.

Esercizio 14. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2, RA(O, \mathbb{E})$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico. Sia $\mathcal{C}$ la conica affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ di equazione:

$$2xy - 2x + 1 = 0.$$

- i.* Determinarne il tipo e indicare la forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa affinementemente equivalente.
- ii.* Scrivere le equazioni di un'affinità ℓ tale che $\ell^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{D}$.

Esercizio 15. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ di equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 1 = 0.$$

- i.* Determinarne il tipo.
- ii.* Ridurre $\mathcal{C}$ alla sua forma canonica $\mathcal{D}$ e determinare un riferimento affine in cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica.
- iii.* Calcolare i punti impropri di $\mathcal{C}$.

Esercizio 16. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = 0.$$

- i.* Verificare che $\mathcal{C}$ è una parabola semplicemente degenera e determinare un riferimento affine in cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica.
- ii.* Determinare le equazioni (in RA) delle due rette (eventualmente complesse) in cui $\mathcal{C}$ è spezzata.
- iii.* Calcolare il punto improprio di $\mathcal{C}$.

Esercizio 17. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. È assegnata la conica affine reale $\mathcal{C}$ di equazione:

$$F = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 4 = 0.$$

- i.* Determinare il tipo di conica e indicarne la forma canonica $\mathcal{D}$ corrispondente.
- ii.* Determinare le equazioni di un'affinità f tale che $f^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{D}$.

Esercizio 18. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ di equazione:

$$xy - 3x - 2y + 4 = 0.$$

Verificare che $\mathcal{C}$ è un'iperbole generale e calcolarne i punti impropri, il centro e gli asintoti.

Esercizio 19. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Sono assegnate in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ le due coniche:

$$\mathcal{C} : x^2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{D} : x^2 - y^2 = 0.$$

- i. Indicarne il tipo; determinarne i punti impropri (rispetto a j_0) e dire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono affinementemente equivalenti.
- ii. Siano $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$ le proiettificazioni di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Scriverne le equazioni; verificare che $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$ sono proiettivamente equivalenti; determinare le equazioni di una proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, tale che $f^{-1}\overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{D}}$.

Esercizio 20. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Determinare le equazioni di tutte le iperboli affini non degeneri, aventi centro $P_0 = (1, 0)$ e punti impropri rispetto a j_0 : $[0 : 1 : 2]$, $[0 : 1 : -1]$.

Esercizio 21. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{C}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Determinare le equazioni di tutte le coniche degeneri a centro, aventi centro $P_0 = (0, -1)$ e passanti per i due punti $P_1 = (1, 2i)$ e $P_2 = (2, 1)$.

Esercizio 22. Sia $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio affine standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ una conica affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ verificante le seguenti condizioni:

- (a) $\mathcal{C}$ è semplicemente degenerare;
- (b) $\mathcal{C}$ passa per i punti $A = (1, -2)$ e $B = (3, 0)$;
- (c) La proiettificazione $\overline{\mathcal{C}}$ (rispetto a j_0) passa per i punti $Q_1 = [0, 2, 1]$ e $Q_2 = [0, 1, -1]$.

- i. Dimostrare che esistono due sole coniche verificanti le condizioni assegnate ed indicarne il tipo.
- ii. Scrivere le equazioni di tali coniche.
- iii. Determinarne il centro [o il vertice, se si tratta di parabole].

[Suggerimento: Esaminare i punti impropri di $\mathcal{C}$].

Esercizio 23. Sia $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ lo spazio proiettivo standard di dimensione 2 sul campo $\mathbb{R}$, con riferimento proiettivo canonico $RP(\mathbb{E})$. È assegnata la conica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione:

$$F = x_0^2 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

- i. Indicarne il tipo e determinare una proiettività f che trasformi $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica $\mathcal{D}$.
- ii. Sia $\mathcal{C}_a$ l'affinizzazione di $\mathcal{C}$ [rispetto a $j_0 : [x_0, x_1, x_2] \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$]. Indicare la forma canonica di $\mathcal{C}_a$ (come conica affine reale) e determinarne l'eventuale centro, gli eventuali punti impropri e gli eventuali asintoti. Tracciare un approssimativo grafico di $\mathcal{C}_a$.

Esercizio 24. Sia $\mathbb{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4y + 6 = 0$$

[già studiata nel caso affine, cfr. Eserc. 11].

- i.* Classificare $\mathcal{C}$ indicando una conica $\mathcal{D}$ in forma canonica ad essa congruente.
- ii.* Scrivere le equazioni di un'isometria g di $\mathbf{E}^2$ tale che $g^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{D}$.
- iii.* Determinare un riferimento cartesiano in cui $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.

Esercizio 25. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$2xy - 2y + 3 = 0.$$

- i.* Classificare $\mathcal{C}$, indicando la forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa congruente.
- ii.* Determinare un riferimento cartesiano in cui $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.
- iii.* Scrivere le equazioni di un'isometria che trasforma il supporto di $\mathcal{C}$ nel supporto di $\mathcal{D}$.

Esercizio 26. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$xy - x - y - 1 = 0.$$

- i.* Classificare $\mathcal{C}$ e scrivere l'equazione della forma canonica $\mathcal{D}$ congruente a $\mathcal{C}$.
- ii.* Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$.
- iii.* Scrivere le equazioni di un'isometria che trasforma il supporto di $\mathcal{D}$ nel supporto di $\mathcal{C}$.

Esercizio 27. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 12y + 9 = 0.$$

- i.* Verificare che $\mathcal{C}$ è doppiamente degenere.
- ii.* Determinare un riferimento cartesiano rispetto a cui $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.
- iii.* Determinare l'equazione della retta $\mathbf{r}$ coincidente con il supporto di $\mathcal{C}$.

Esercizio 28. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$7x^2 - 3y^2 - 10\sqrt{3}xy + 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0.$$

- i.* Determinarne il tipo.

- ii. Determinare un insieme di isometrie di $\mathbf{E}^2$ (indicandone il tipo e scrivendone le equazioni) che trasformino $\mathcal{C}$ nella forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa congruente.

Esercizio 29. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + 2y + \frac{5}{4} = 0.$$

- i. Determinarne il tipo.
- ii. Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica $\mathcal{D}$.
- iii. Scrivere le equazioni delle isometrie che intervengono in tale riduzione.
- iv. Scrivere l'equazione dell'isometria che trasforma il supporto di $\mathcal{C}$ nel supporto di $\mathcal{D}$.
- v. Determinare un riferimento cartesiano in cui $\mathcal{C}$ assume forma canonica.

Esercizio 30. Sia $\mathcal{D}$ una conica euclidea a centro in forma canonica.

- i. Determinare gli assi di $\mathcal{D}$.
- ii. Verificare che, indicato con $\mathbf{r}$ un asse di $\mathcal{D}$ e con ρ la riflessione intorno ad $\mathbf{r}$, risulta $\rho^{-1}\mathcal{D} = \mathcal{D}$ [cioè $\mathcal{D}$ è simmetrica rispetto ad ogni suo asse].

Esercizio 31. Sia $\mathcal{D}$ una parabola euclidea in forma canonica. Fissato in $\mathbf{E}^2$ m riferimento cartesiano $RC(O, E)$, verificare che:

- i. L'autospazio $\mathbf{E}_0(\mathcal{D})$ coincide con $\langle \underline{e}_1 \rangle$.
- ii. L'asse x è l'unica retta parallela ad $\underline{e}_1$ rispetto a cui $\mathcal{D}$ è simmetrica.

Esercizio 32. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$x^2 + y^2 + 6xy + \frac{1}{\sqrt{2}}16x = 0.$$

- i. Verificare che $\mathcal{C}$ è un'iperbole generale.
- ii. Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica $\mathcal{D}$.
- iii. Determinare il centro, gli asintoti ed i punti impropri di $\mathcal{C}$.

Esercizio 33. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - \frac{7}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 7 = 0.$$

- i.* Verificare che $\mathcal{C}$ è una parabola generale.
- ii.* Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica $\mathcal{D}$, descrivendo tutte le isometrie che intervengono in tale riduzione.
- iii.* Senza ricorrere alla forma canonica $\mathcal{D}$, determinare l'asse ed il vertice di $\mathcal{C}$.

Esercizio 34. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$xy + x + y + 1 = 0.$$

- i.* Verificare che $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- ii.* Determinarne il centro e gli asintoti.
- iii.* Determinare un riferimento cartesiano rispetto a cui $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica.

Esercizio 35. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. È assegnata la conica euclidea $\mathcal{C}$ di equazione:

$$F = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 4 = 0.$$

[già considerata (come conica affine) nell'Eserc. 17]. Ridurre $\mathcal{C}$ in forma canonica e tracciare il grafico del supporto di $\mathcal{C}$.

Esercizio 36. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la conica euclidea di equazione:

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0.$$

- i.* Riconoscere che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale.
- ii.* Determinarne (senza ridurre $\mathcal{C}$ a forma canonica) il centro, i due assi ed i quattro vertici [cioè le intersezioni tra $\mathcal{C}$ ed i suoi assi].

Esercizio 37. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. È assegnata l'iperbole euclidea $\mathcal{C}$, avente equazione:

$$F(x, y) = 50xy + 1 = 0.$$

- i.* Indicare centro e asintoti di $\mathcal{C}$ e tracciarne (approssimativamente) il grafico. Determinare un'isometria f che trasformi $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica.
- ii.* Sia ρ la riflessione di asse la retta $\mathbf{r}$ di equazione $2x - y + 1 = 0$. Scrivere le equazioni di ρ .
- iii.* Scrivere la matrice dell'iperbole trasformata $\rho^{-1}\mathcal{C}$. Calcolarne centro e asintoti e tracciarne (approssimativamente) il grafico.

Esercizio 38. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sono assegnate le due rette ortogonali:

$$\mathbf{r}_1 : x + 2y + 2 = 0, \quad \mathbf{r}_2 : 2x - y - 1 = 0$$

ed i rispettivi punti $Q_1 = (4, -3), Q_2 = (\frac{1}{2}, 0)$. Determinare l'equazione dell'ellisse $\mathcal{C}$ avente assi $\mathbf{r}_1$ ed $\mathbf{r}_2$ e passante per i punti Q_1, Q_2 .

Esercizio 39. Sia $\mathbf{E}^2$ lo spazio euclideo standard di dimensione 2, con riferimento euclideo canonico $RE(O, \mathbb{E})$. Sia $\mathcal{C}$ la parabola generale verificante le seguenti condizioni:

- (a) $\mathcal{C}$ ha vertice $V = (1, 1)$;
- (b) $\mathcal{C}$ ha per asse la retta $\mathbf{r} : x - y = 0$;
- (c) $\mathcal{C}$ passa per il punto $Q = (4, 0)$.

Sia RC' un riferimento cartesiano equiverso ad RC , rispetto a cui $\mathcal{C}$ si scrive in forma canonica, cioè $(y')^2 = 2px'$.

- i. Scrivere le formule del cambiamento di coordinate da RC' ad RC e viceversa.
- ii. Determinare il parametro p dell'equazione canonica di $\mathcal{C}$.
- iii. Scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ nel riferimento RC .