Foglio di Esercizi N.7

Geometria 2 - parte A

Esercizio 1. Considerare la retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e identificarla, tramite $j_0\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $z \mapsto [1 : z]$, all'insieme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, indentificando quindi ∞ con $[0 : 1]$. Sia $\mathcal{C}$ un cerchio di Möbius di equazione $E(X^2 + Y^2) + AX + BY + C = 0$, con $A, B, C, E \in \mathbb{R}$ e $A^2 + B^2 - 4EC > 0$.

Quindi $\mathcal{C}$ è il sottoinsieme di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ descritto da $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}$ e $E(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0\}$ se $E \neq 0$, e $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}$ e $Ax + By + C = 0\} \cup \{\infty\}$ se $E = 0$.

i. Dato un cerchio di Möbius $\mathcal{C}$ di equazione $E(X^2 + Y^2) + AX + BY + C = 0$, con $A, B, C, E \in \mathbb{R}$ e $A^2 + B^2 - 4EC > 0$ e $E \neq 0$, determinare il centro e il raggio di $\mathcal{C}$.

ii. Scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ in $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$, e scrivere l'equazione di $f^{-1}(\mathcal{C})$ in $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$, dove $f(z) = 1/z$ è la trasformazione di Möbius *inversione*.

iii. Trovare tutti i cerchi di Möbius stabili per l'inversione: tali che $f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

iv. Scrivere un'equazione in z_0, z_1, con $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, soddisfatta da tutti i punti $[z_0 : z_1]$ del cerchio di Möbius $\mathcal{C}$, incluso (eventualmente) $\infty := [0 : 1]$, visto come sottoinsieme di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

v. Trovare una forma hermitiana $h\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, tale che $h((z_0, z_1), (z_0, z_1)) = 0$ se e solo se $[z_0 : z_1] \in \mathcal{C}$.

vi. Mostrare che la forma hermitiana definita sopra è non degenere. È definita positiva? È Definita negativa?

Esercizio 2. Sia $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$, dove $\Im(z) = (z - \bar{z})/2i$ è la parte immaginaria di z.

i. Sia $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ una matrice invertibile a coefficienti reali, $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-d/c\}$, mostrare che $\Im(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\Im(z)$.

ii. Sia $PGL_2^+(\mathbb{R})$ il sottogruppo di $PGL_2(\mathbb{R})$ formato dalle classi di matrici con determinante positivo. Mostrare che le trasformazioni di Möbius

$$f\colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \ , \ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \ , \text{ con } A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2^+(\mathbb{R}) \ ,$$

verificano $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

iii. Considerare la famiglia $\mathfrak{C}$ di cerchi di Möbius di equazione $E(X^2+Y^2)+BX+C=0$, con $E,B,C\in\mathbb{R}$ e $B^2-4EC>0$. Mostrare che le trasformazioni di Möbius in $PGL_2^+(\mathbb{R})$ definite sopra trasformano cerchi di Möbius della famiglia $\mathfrak{C}$ in cerchi di Möbius della famiglia $\mathfrak{C}$.

iv. Mostrare che ogni cerchio di Möbius $\mathcal{C}$ della famiglia $\mathfrak{C}$ verifica $\mathcal{C}\cap\mathbb{H}\neq\varnothing$.

v. Mostrare che per 2 punti distinti di $\mathbb{H}$ passa un unico cerchio di Möbius della famiglia $\mathfrak{C}$.

vi. Definire l'angolo di incidenza in un punto $z\in\mathbb{H}$ tra due cerchi di Möbius della famiglia $\mathfrak{C}$ passanti per z. Verificare che per i "triangoli" tra 3 punti di $\mathbb{H}$ ottenuti tramite cerchi di Möbius della famiglia $\mathfrak{C}$, la somma degli angoli i interni al triangolo è minore di π.

vii. Verificare che dato un cerchio di Möbius $\mathcal{C}$ della famiglia $\mathfrak{C}$ e un punto $z_0\in\mathbb{H}$ con $z\notin\mathcal{C}$, esistono infiniti cerchi di Möbius della famiglia $\mathfrak{C}$ che passano per z_0 e che non intersecano $\mathcal{C}\cap\mathbb{H}$.

viii. Verificare che dati due cerchi di Möbius $\mathcal{C},\mathcal{D}$ della famiglia $\mathfrak{C}$ incidenti in un punto $z_0\in\mathbb{H}$, e data una trasformazione di Möbius $f\colon z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ con $A:=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in PGL_2^+(\mathbb{R})$, l'angolo in $f^{-1}(z_0)$ tra i due cerchi di Möbius $f^{-1}(\mathcal{C})$ e $f^{-1}(\mathcal{D})$ è uguale all 'angolo in z_0 tra i due cerchi di Möbius $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.