Foglio di Esercizi N.6

Geometria 2 - parte A

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_k$ considerare il piano affine π di equazione (rispetto al riferimento affine standard) $X_1 + X_2 + X_3 = 1$.

i. Scrivere un'equazione dell'omogeneizzato $\Pi \subset \mathbb{P}^3_k$ del piano affine $\pi \subset \mathbb{A}^3_k$ rispetto all'inclusione $j_0 : \mathbb{A}^3_k \hookrightarrow \mathbb{P}^3_k$.

ii. Scrivere le equazioni della proiezione $f : \mathbb{P}^3 \smallsetminus \{P\} \to \Pi \subset \mathbb{P}^3$ di centro $P = [0 : 1 : 1 : 1]$ sul piano Π.

iii. Si può svolgere l'esercizio se $\mathrm{car}(k) = 3$? Se sì scrivere le equazioni della proiezione, altrimenti spiegare perché no.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ considerare il riferimento proiettivo standard, associato alla base canonica $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$. Mostrare che i seguenti punti sono in posizione generale e determinare il cambiamento di coordinate dal riferimento standard a quello con riferimento proiettivo $RP(P_0, P_1, P_2, U)$:

i. $P_0 = [1 : 1 : -1], P_1 = [2 : 1 : 0], P_2 = [0 : 1 : 1], U = [1 : 1 : 0]$.

ii. $P_0 = [1 : -1 : 0], P_1 = [0 : 1 : 1], P_2 = [2 : 0 : 1], U = [1 : 2 : 2]$.

iii. $P_0 = [1 : 1 : 1], P_1 = [1 : 0 : 1], P_2 = [2 : 1 : 0], U = [4 : 2 : 2]$.

Esercizio 3. Mostrare che esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ che soddisfa le condizioni seguenti, determinarne una matrice e le equazioni:

$$f[1 : 1] = [1 : -1]\ ,\ f[2 : 0] = [1 : 1]\ ,\ f[1 : -1] = [2 : 1]\ .$$

Esercizio 4. Mostrare che esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che soddisfa le condizioni seguenti, determinarne una matrice e le equazioni:

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'\ ,\ f(\mathbf{s}) = \mathbf{s}'\ ,\ f[1 : 2 : 1] = [1 : 1 : 1]\ ,$$

dove $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$, sono le rette di equazioni rispettivamente:

$$X_0 - X_1 = 0\ ,\ X_0 + X_1 = 0\ ,\ X_0 + X_1 + X_2 = 0\ ,\ X_1 + X_2 = 0\ .$$

Quante ne esistono? Determinarle tutte e scrivere le loro espressioni in coordinate.

Esercizio 5. Considerare le seguenti applicazioni $f\colon \mathbb{P}^2_k \to \mathbb{P}^2_k$. Determinare, al variare di k, se sono delle proiettività, nel caso non lo siano determinare dove sono definite, se sono delle proiezioni su che sottospazio e con che centro, e in ogni caso quali sono i loro punti fissi:

i. $f[X_0 : X_1 : X_2] = [-X_0+15X_1+6X_2 : -2X_0+8X_1+2X_2 : 4X_0-18X_1-5X_2]$.

ii. $f[X_0 : X_1 : X_2] = [X_0 - X_1 : X_0 + 3X_1 : 2X_2]$.