

Foglio di Esercizi N.5

Geometria 2 - parte A

Esercizio 1. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ con riferimento proiettivo standard, considerare i punti fondamentali $F_0 = [1 : 0 : 0]$, $F_1 = [0 : 1 : 0]$, $F_2 = [0 : 0 : 1]$, e il punto unità $U = [1 : 1 : 1]$.

- i.* Mostrare che esiste un'unica proiettività $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tale che $f(P_0) = U$, $f(P_1) = P_0$, $f(P_2) = P_1$, $f(U) = P_2$.
- ii.* Si esprima f in coordinate nel riferimento proiettivo standard.
- iii.* Trovare tutti i punti fissi di f , cioè i punti $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tali che $f(P) = P$.
- iv.* Considerare l'analoga proiettività sul piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, e trovarne i punti fissi.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ considerare il riferimento proiettivo standard, associato alla base canonica $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$, e la proiettività $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ associata all'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i.* Scrivere f e f^{-1} in coordinate (nel riferimento proiettivo standard).
- ii.* Siano $P_1 = [1 : 0 : 1]$ e $P_2 = [1 : 1 : 0]$. Scrivere un'equazione della retta $\mathbf{r} = L(P_1, P_2)$ e delle sue immagini $f(\mathbf{r})$ e $f^{-1}(\mathbf{r})$.
- iii.* Sia $\mathbf{s}$ la retta in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$, scrivere un'equazione cartesiana della retta $f^{-1}(\mathbf{s})$.

Esercizio 3. Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ considerare i 3 punti con coordinate nel riferimento proiettivo standard: $P_0 = [1 : 0 : 0]$, $P_1 = [-1 : 1 : 0]$, $P_2 = [2 : -1 : 1]$, e $P_3 = [0 : 0 : 1]$.

- i.* Mostrare che i 4 punti sopra sono in posizione generale.
- ii.* Mostrare che esiste un'unica proiettività $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che trasforma ordinatamente i punti $P_0 = [1 : 0 : 0]$, $P_1 = [-1 : 1 : 0]$, $P_2 = [2 : -1 : 1]$, e $P_3 = [0 : 0 : 1]$ nei punti $F_0 = [1 : 0 : 0]$, $F_1 = [0 : 1 : 0]$, $F_2 = [0 : 0 : 1]$, e $U = [1 : 1 : 1]$.

- iii. Scrivere la proiettività f in coordinate.
- iv. Sia $\mathbf{s}$ la retta in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$, scrivere un'equazione cartesiana della retta $f^{-1}(\mathbf{s})$.
- v. Trovare tutti i punti fissi di f .
- vi. Mostrare che esiste una retta $\mathbf{r} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tale che $f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, e scriverne un'equazione cartesiana.

Esercizio 4. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ con riferimento proiettivo standard, considerare la seguente applicazione:

$$f([X_0 : X_1 : X_2 : X_3]) = ([-X_0 - 6X_3 : -2X_0 + X_1 + X_2 - 6X_3 : -2X_0 + X_2 - 6X_3 : 2X_3])$$

- i. Mostrare che l'applicazione f è ben definita, che è una proiettività, e scriverne una matrice associata.
- ii. Trovare tutti i punti fissi della proiettività f .
- iii. Trovare tutti i punti fissi di f .
- iv. Mostrare che l'iperpiano $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ di equazione $X_3 = 0$ verifica $f(H) = H$. È l'unico iperpiano con questa proprietà?
- v. Mostrare che f ristretta a $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \setminus H$ è un'affinità e scriverne le equazioni (cioè l'espressione dell'applicazione in coordinate) in un riferimento affine opportuno.
- vi. Considerare il riferimento proiettivo $RP(P_0, P_1, P_2, F)$ dello spazio proiettivo H , dove $P_0 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $P_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$, $P_2 = [0 : 0 : 1 : 0]$, $F = [2 : 1 : -1 : 0]$. Determinare una base dello spazio vettoriale di equazione $X_3 = 0$ in $\mathbb{R}^4$ che induca il sistema di riferimento proiettivo $RP(P_0, P_1, P_2, F)$ su H .
- vii. Scrivere le equazioni (cioè l'espressione dell'applicazione in coordinate) di $f' = f|_H$ nelle coordinate del riferimento proiettivo descritto sopra.

Esercizio 5. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_k^2$ considerare le 3 rette con equazioni (nel riferimento proiettivo standard):

$$\mathbf{r}_1: X_0 - X_1 = 0 \quad ; \quad \mathbf{r}_2: X_1 + X_2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{r}_3: X_0 + 2X_2 = 0 .$$

- i. Mostrare che le 3 rette non sono concorrenti.
- ii. Mostrare che esiste un'unica proiettività $T: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ che verifica le seguenti condizioni:

$$T(\mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_2 \quad ; \quad T(\mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_3 \quad ; \quad T(\mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \quad ; \quad T(P) = P \quad \text{con} \quad P = [1, 0, 1] .$$
- iii. Scrivere le equazioni della proiettività T .
- iv. Ragionare sulla caratteristica di k (quali casi escludere per i punti sopra?)