

Foglio di Esercizi N.4

Geometria 2 - parte A

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ i punti $P_1 = [1 : 0 : 1 : 2]$, $P_2 = [0 : 1 : 1 : 1]$, $P_3 = [2 : 1 : 2 : 2]$, $P_4 = [1 : 1 : 2 : 3]$.

- i.* Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
- ii.* Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino equazioni cartesiane.
- iii.* Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$, ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_k^2$: per $i = 0, 1, 2$, considerare l'applicazione $j_i: k^2 \rightarrow U_i \subseteq \mathbb{P}_k^2$ che definisce un riferimento affine sull'aperto fondamentale U_i (ricordare che, per esempio per $i = 0$, si ha $j_0(x, y) = [1 : x : y]$).

- i.* Si determinino due rette proiettive distinte $r, s \subset \mathbb{P}_k^2$ tali che $(j_1)^{-1}(r \cap U_1)$ e $(j_1)^{-1}(s \cap U_1)$ siano rette (affini) parallele in k^2 , e che lo stesso valga per $(j_2)^{-1}(r \cap U_2)$ e $(j_2)^{-1}(s \cap U_2)$.
- ii.* Esistono rette proiettive distinte $r, s \subset \mathbb{P}_k^2$ tali che per ogni $i = 0, 1, 2$ le rette affini $(j_i)^{-1}(r \cap U_i)$ e $(j_i)^{-1}(s \cap U_i)$ siano parallele in k^2 ?

Esercizio 3. Sia $\ell \subset \mathbb{P}_k^2$ la retta definita da $X_0 + X_1 = 0$, si ponga $U := \mathbb{P}_k^2 \setminus \ell$ e siano $\alpha, \beta: U \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ definite da

$$\alpha([x_0 : x_1 : x_2]) = \left(\frac{x_1}{x_0 + x_1}, \frac{x_2}{x_0 + x_1} \right) \quad , \quad \beta([x_0 : x_1 : x_2]) = \left(\frac{x_0}{x_0 + x_1}, \frac{x_2}{x_0 + x_1} \right)$$

- i.* Si calcoli $\alpha \circ \beta^{-1}$, e si verifichi che tale mappa è un'affinità.
- ii.* Si trovino 2 sistemi di riferimento affini per il piano affine U , tali che la mappa $\alpha \circ \beta^{-1}$ sia il cambiamento di riferimento affine da uno all'altro.
- iii.* Si descriva un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}_k^2$ tale che la mappa α sia la mappa j_0 , e uno tale che la mappa β sia j_1 .

Esercizio 4. Sia $\mathcal{RP}(P_0, \dots, P_{n+1})$ un sistema di riferimento dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ e sia $0 \leq K \leq n$. Siano $S = L(P_0, P_1, \dots, P_K)$, $S' = L(P_{K+1}, \dots, P_{n+1})$.

- i. Si dimostri che esiste $Q \in \mathbb{P}(V)$ tale che $S \cap S' = \{Q\}$.
- ii. Si dimostri che $\{P_0, \dots, P_K, Q\}$ è un sistema di riferimento proiettivo di S , e che $\{P_{K+1}, \dots, P_{n+1}, Q\}$ è un sistema di riferimento proiettivo di S' .
- iii. Provare a dimostrare le affermazioni sopra “con” e “senza” coordinate.

Esercizio 5. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_k^2$:

- i. Dimostrare la seguente affermazione: se $A, B, C, D \in \mathbb{P}_k^2$ sono 4 punti in posizione generale e

$$P = L(A, B) \cap L(C, D), \quad Q = L(A, C) \cap L(B, D), \quad R = L(A, D) \cap L(B, C),$$

allora P, Q, R non sono allineati.

- ii. Enunciare la proposizione duale.

Esercizio 6. Siano $r, s \subset \mathbb{P}_k^3$ due rette tali che $r \cap s = \emptyset$. Sia $P \in \mathbb{P}_k^3$ un punto tale che $P \notin r$ e $P \notin s$.

- i. Mostrare che per ogni iperpiano $H \subset \mathbb{P}_k^3$ tale che $r \not\subset H$ e $s \not\subset H$, le rette affini $r \cap (\mathbb{P}^2 \setminus H)$ e $s \cap (\mathbb{P}^2 \setminus H)$ sono rette sghembe nello spazio affine $\mathbb{P}^2 \setminus H$.
- ii. Mostrare che esiste un'unica retta (proiettiva) $\ell \subset \mathbb{P}_k^3$ tale che $\ell \cap r \neq \emptyset$, $\ell \cap s \neq \emptyset$ e $P \in \ell$.
- iii. Se $k = \mathbb{R}$, r ha equazioni $x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0$, s ha equazioni $2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0$, e $P = [0 : 1 : 0 : 1]$, determinare le equazioni cartesiane della retta ℓ descritta sopra.

Esercizio 7. Siano W_1, W_2, W_3 piani proiettivi in $\mathbb{P}_k^4$ tali che $W_i \cap W_j$ sia un punto per ogni $i \neq j$, e che $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$.

Dimostrare che esiste un unico piano W_0 tale che per $i = 1, 2, 3$ l'insieme $W_0 \cap W_i$ sia una retta proiettiva in $\mathbb{P}_k^4$.

Esercizio 8. Siano r_1, r_2, r_3 rette di $\mathbb{P}_k^4$ a due a due sghembe, e non tutte contenute in un iperpiano. Si dimostri che esiste un'unica retta che interseca sia r_1 , sia r_2 , sia r_3 .