

Foglio di Esercizi N.2

Geometria 2 - parte A

Esercizio 1. Sia $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica così definita:

$$Q((x, y, z)) = x^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- i. Scrivere la matrice A della forma polare di Q , cioè la forma bilineare β di cui Q è forma quadrata associata, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (e_1 \ e_2 \ e_3)$ di $\mathbb{R}^3$.
- ii. Scrivere la matrice B e l'espressione di Q (come polinomio omogeneo) rispetto alla base $\mathbb{E}' = (e_1 + e_3 \ e_1 \ e_2)$.
- iii. Calcolare il rango di β , la segnatura e l'espressione canonica di Q , determinando una base rispetto a cui Q si scrive in forma canonica.

Esercizio 2. Sia β la forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^4$ definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$ di $\mathbb{R}^4$ dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- i. Ridurre β in forma diagonale con il metodo di Lagrange, determinando l'espressione di β ed una base diagonalizzante $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^4$.
- ii. Determinare il rango e la segnatura di β e scriverne la matrice canonica.
- iii. Scrivere l'equazione del cono isotropo $I_\beta(\mathbb{R}^4)$ rispetto alla base $\mathbb{F}$.

Esercizio 3. Sia $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica così definita:

$$Q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_2^2 - x_4^2 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3, \quad \forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

- i. Determinare l'espressione di Q rispetto ad una sua base diagonalizzante. Indicare il rango e la segnatura di Q .
- ii. Scrivere l'espressione di Q rispetto ad una sua base canonica.

Esercizio 4. Sia $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale. Dimostrare che se $I_\beta(V) = \{0\}$ allora β è definita positiva o definita negativa.

Esercizio 5. Sia β la forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^4$ definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$ di $\mathbb{R}^4$ dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- i.* Ridurre β in forma diagonale con il metodo di Lagrange, determinando l'espressione di β ed una base diagonalizzante $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^4$.
- ii.* Determinare il rango e la segnatura di β e scriverne la matrice canonica.
- iii.* Scrivere l'equazione del cono isotropo $I_\beta(\mathbb{R}^4)$ rispetto alla base $\mathbb{F}$.

Esercizio 6. Sia β la forma bilineare simmetrica di $\mathbb{C}^2$ definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = (e_1 \ e_2)$ di $\mathbb{C}^2$ dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- i.* Ridurre β in forma diagonale con il metodo di Lagrange, determinando l'espressione di β ed una base diagonalizzante $\mathbb{F}$ di $\mathbb{C}^2$.
- ii.* Determinare la matrice canonica di β e la corrispondente base $\mathbb{F}'$.
- iii.* Scrivere l'equazione del cono isotropo $I_\beta(\mathbb{C}^2)$ rispetto alla base $\mathbb{F}$.

Esercizio 7. Sia $k = \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Considerare la forma quadratica Q su $V = k^3$ definita dal polinomio

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xy - xz \in k[x, y, z].$$

- i.* Scrivere la matrice A della forma quadratica Q (o della forma bilineare cui essa è associata) determinarne il rango.
- ii.* Diagonalizzare Q (con l'algoritmo di Lagrange) e indicarne l'espressione in una base Q -diagonalizzante.

Esercizio 8. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la forma bilineare β così definita:

$$\beta(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- i.* Scrivere la matrice di β rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$ e verificare che β è un prodotto scalare.
- ii.* Determinare l'espressione di β rispetto alla base

$$\mathbb{E}' = (e_3 \ e_2 + e_3 \ -e_1 + e_2 - e_3).$$

Esercizio 9. Sia β la forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^3$ definita, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (e_1 \ e_2 \ e_3)$ di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i.* Scrivere l'espressione di $\beta(x, y)$ per $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, e verificare che β è un prodotto scalare.
- ii.* Ortonormalizzare rispetto a β la base canonica $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$.
- iii.* Calcolare equazioni cartesiane e basi β -ortonormali dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$e_1^\perp, \ e_2^\perp, \ e_3^\perp, \ \langle e_1, e_2 \rangle^\perp, \ \langle e_1, e_3 \rangle^\perp, \ \langle e_2, e_3 \rangle^\perp.$$

Esercizio 10. Sia β la forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^4$ definita rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$ di $\mathbb{R}^4$ dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i.* Verificare che β è un prodotto scalare.
- ii.* Sia S l'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ di equazione (rispetto ad $\mathbb{E}$) $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$. Determinare un sistema di generatori e di equazioni cartesiane dello spazio β -ortogonale $S^\perp$.
- iii.* Determinare delle basi β -ortogonali di S e $S^\perp$.

Esercizio 11. Sia $u_0 = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$ e sia β il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i.* Determinare (rispetto ad $\mathbb{E}$) la matrice B dell'operatore lineare $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di proiezione β -ortogonale sulla retta $\langle u_0 \rangle$.
- ii.* Determinare (rispetto ad $\mathbb{E}$) la matrice C dell'operatore lineare $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di proiezione β -ortogonale rispetto alla direzione u_0 .
- iii.* Verificare che $P + Q = 1_{\mathbb{R}^2}$.