

Foglio di Esercizi N.1

Geometria 2 - parte A

Esercizio 1. Siano V, W due spazi vettoriali sul campo k . Considerare l'applicazione:

$$\begin{aligned}\Psi: \text{Hom}_k(V, W) &\rightarrow \text{Hom}_k(W^*, V^*) \\ f &\mapsto {}^t f\end{aligned}$$

- i. Mostrare che Ψ è lineare.
- ii. Mostrare che, se V e W hanno dimensione finita, Ψ è un isomorfismo.
- iii. Cosa si può dire se V e/o W hanno dimensione infinita?

Esercizio 2. Sia V uno spazi vettoriale sul campo k . Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ una forma bilineare. quando possiamo concludere che β alternante implica β anti-simmetrica?

Esercizio 3. Siano V, W due spazi vettoriali sul campo k . Considerare le applicazioni:

$$\begin{aligned}\text{Bil}_k(V \times W, k) &\rightarrow \text{Hom}_k(V, W^*) , \text{ e} \\ \beta &\mapsto \beta_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Bil}_k(V \times W, k) &\rightarrow \text{Hom}_k(W, V^*) . \\ \beta &\mapsto \beta_2\end{aligned}$$

- i. Mostrare sono due isomorfismi canonici.
- ii. Mostrare che, se V e W hanno dimensione finita, β_1 e β_2 sono trasposte una dell'altra. (*consiglio:* mostrarlo sia fissando delle basi, che “senza basi”)
- iii. Cosa si può dire se V e/o W hanno dimensione infinita?
- iv. Mostrare che β è simmetrica se e solo se $\beta_1 = \beta_2$, e β è antisimmetrica se e solo se $\beta_1 = -\beta_2$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo k . Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ una forma bilineare. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i.* β è non-degenere a sinistra.
- ii.* β è non-degenere a destra.
- iii.* β_1 è un isomorfismo.
- iv.* β_2 è un isomorfismo.
- v.* Per ogni $v_0 \neq 0$ in V esiste $w_0 \in V$ tale che $\beta(v_0, w_0) \neq 0$.
- vi.* Per ogni $w_0 \neq 0$ in V esiste $v_0 \in V$ tale che $\beta(v_0, w_0) \neq 0$.

Esercizio 5. Sia $V = k^2$ lo spazio vettoriale canonico di dimensione 2 sul campo k , e sia $D: V \times V \rightarrow k$ l'applicazione definita da $D((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

- i.* Verificare che D è una forma bilineare antisimmetrica.
- ii.* Scrivere la matrice di D nella base canonica di k^2 .
- iii.* Definire il cono isotropo per una forma antisimmetrica e calcolare il cono isotropo di D .
- iv.* Verificare che D è una forma bilineare alternante.

Esercizio 6. Sia $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il campo con 2 elementi, e sia $V = k^2$.

- i.* Trovare una forma bilineare su V che sia anisimmetrica ma non alternante.
- ii.* Trovare le condizioni su una forma bilineare su V affinché sia alternante.
- iii.* Trovare le condizioni su una forma bilineare su $W = k^n$ affinché sia alternante.

Esercizio 7. Sia $k = \mathbb{R}$ il campo dei numeri reali, e sia $V = \mathbb{R}^3$. Rappresentare con un disegno il cono isotropo $I_\beta(\mathbb{R}^3)$ per β una forma bilineare definita (in base canonica) dalle seguenti matrici:

- i.* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- ii.* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- iii.* $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $a, b > 0$ oppure con $a > 0$ e $b < 0$.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo k . Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ una forma bilineare simmetrica.

- i.* Mostrare che se il cono isotropo è $I_\beta(V) = 0$ allora β è non-degenere. Fornire un esempio di V con $\dim_k V \geq 2$ e $I_\beta(V) = 0$.
- ii.* Mostrare con un controesempio che non vale l'implicazione inversa.
- iii.* Se $k = \mathbb{C}$, può essere $I_\beta(V) = 0$? E se $k = \mathbb{C}$ e $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$?
- iv.* Mostrare che in generale $I_\beta(V)$ non è un sottospazio vettoriale di V .

Esercizio 9. Sia k un campo di caratteristica diversa da 2, e sia $V = k^3$. Trovare una base diagonalizzante per la forma bilineare β definita (in base canonica) dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo k . Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ una forma bilineare simmetrica. Sia v_0 un vettore non isotropo, sia $\alpha_{v_0}: V \rightarrow k$ la mappa che associa a un vettore $w \in V$ il suo coefficiente di Fourier rispetto a v_0 , cioè $\alpha_{v_0}(w) = \frac{\beta(v_0, w)}{\beta(v_0, v_0)}$.

- i.* Mostrare che $\alpha_{v_0}: V \rightarrow k$ è lineare.
- ii.* Determinare $\ker(\alpha_{v_0})$ e $\text{Im}(\alpha_{v_0})$.
- iii.* Se $\text{car}(k) \neq 5$, $V = k^3$, β ha matrice associata $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, e $v_o = (-1, 3, 2) \in V$, mostrare che v_o non è isotropo, e determinare la matrice di $\alpha_{v_0}: V \rightarrow k$ rispetto alle basi canoniche di $V = k^3$ e k .
- iv.* Per la forma al punto sopra, determinare un'equazione cartesiana di $\underline{e}_2^\perp$.
- v.* Per la forma al punto (iii) sopra, decomporre il vettore $\underline{e}_2$ in $\langle v_o \rangle \oplus v_0^\perp$.