10/03/2026

$V$ spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$)

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V$ se

- $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
- $v_1, \dots, v_n$ sono l.i.

Esempi di basi di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

(1) $\{(1,0),(0,1)\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ (su $\mathbb{R}$)

(2) $\{(2,-1),(3,4)\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ (su $\mathbb{R}$)

(3) $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ non è base di $\mathbb{R}^2$ (su $\mathbb{R}$) poichè i vettori non sono l.i.

(4) Una base per $\mathbb{R}^n$ (su $\mathbb{R}$):

Chiaramente $\mathbb{R}^n = \langle \underbrace{(1,0,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), (0,0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)}_{n \text{ vettori}} \rangle$

poichè $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1,0,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,0,1)$

Verifichiamo indipendenza lineare:

$\alpha_1(1,0,0,\dots,0) + \alpha_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + \alpha_n(0,0,\dots,1) = (0,0,0,\dots,0) \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$

Quindi $\{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e si dice la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

(5) $\{(1,2,-1),(0,2,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (su $\mathbb{R}$)?

Sono l.i.? $\alpha(1,2,-1) + \beta(0,2,1) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Quindi loro sono l.i. (Vedere osservazione alla fine)

È vero che ogni singolo vettore $(x,y,z)$ di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di questi? Cioè è vero che per ogni $(x,y,z)$ esistono $\alpha$ e $\beta$ tali che

$$(x,y,z) = \alpha(1,2,-1) + \beta(0,2,1) \quad ?$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 2\beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 2\beta \\ z = -x + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 2(z+x) \\ \beta = z + x \end{cases}$$

$$\iff \{ y = 4x + 2z \longrightarrow$$ osserviamo che $(0,0,1)$ non soddisfa questa equazione!

Allora $(1,2,-1)$ e $(0,2,1)$ non generano $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente guardo la matrice completa di $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 2\beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y - 2x \\ 0 & 1 & z + x \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z + x \\ 0 & 2 & y - 2x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z + x \\ 0 & 0 & y - 2x - 2(z+x) \end{array}\right)$$

Da Rouché-Capelli, questo sistema ha soluzioni se e solo se

$$y - 4x - 2z = 0.$$

(6) Base per lo spazio delle soluzioni di

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{con } b^2 - 4ac > 0.$$

Ricordiamo che questo spazio, $V$, è generato da $e^{r_1 x}$ e $e^{r_2 x}$ dove $r_1$ e $r_2$ sono le radici reali di $ax^2 + bx + c = 0$

$V = \langle e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \rangle$. Vediamo se sono indipendenti.

$$\alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} = 0 \iff \alpha e^{r_1 x} = -\beta e^{r_2 x}$$

$$\iff \alpha = -\beta \frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} \iff \alpha = -\beta e^{(r_1 - r_2)x}$$

Come è possibile avere $-\beta e^{(r_1 - r_2)x}$ uguale ad una funzione costante? Se $r_1 - r_2 = 0$, allora è costante, però tale non succede dato che $b^2 - 4ac > 0$ garantisce $r_1 \neq r_2$. Allora resta avere $\beta = 0$, da cui concludo che anche $\alpha = 0$. Allora queste funzioni sono l.i. e $\{ e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \}$ è una base di $V$.

(7) Base per il sottospazio delle soluzioni di

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2z - t = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^4$$

$\rightsquigarrow$ matrice completa $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$

Variabili libere: $y$ e $t$
Variabili dominanti: $x$ e $z$

$$\begin{cases} x = -2y \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Tutte le Soluzioni sono della forma

$$\left(-2y, \; y, \; \tfrac{1}{2}t, \; t\right)$$

$$= y(-2,1,0,0) + t\left(0,0,\tfrac{1}{2},1\right)$$

Questo spazio è generato da $(-2,1,0,0)$ e $(0,0,\frac{1}{2},1)$.
Vediamo se sono l.i.:

$$\alpha(-2,1,0,0) + \beta\left(0,0,\tfrac{1}{2},1\right) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha = 0 \\ \alpha = 0 \\ \frac{1}{2}\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Allora $\{(-2,1,0,0), (0,0,\frac{1}{2},1)\}$ è una base dello spazio di soluzioni.

Osservazioni: (1) Due vettori $v_1$ e $v_2$ sono l.i. se e solo se uno non è riscalamento dell'altro!

(2) Cosa succede se il vettore nullo fa parte di un insieme di vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, 0_V\}$?

Allora un tale insieme è sempre l.d. - infatti il vettore nullo è sempre una combinazione lineare degli altri vettori : $0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_n = 0_V$

Allora il vettore nullo non può fare parte di nessuna base!

---

**Teorema 1.16** : Sia $V$ uno spazio vettoriale non-nullo su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). Supponiamo che $V$ è generato da $v_1, \dots, v_n$. Allora esiste una base di $V$ contenuta nel insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$.

**Dimostrazione** : Se capita che questi vettori siano già l.i., allora ho una base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Se invece sono l.d. allora uno di loro è combinazione lineare degli altri. Questo vuole dire che togliendo quel vettore dal insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$, i vettori rimanenti generano comunque $V$. E allora ho un insieme di $n-1$ vettori che generano $V$. Si procede così : verificando per prima se i vettori sono l.i. ; altrimenti togliamo un vettore che sia combinazione lineare degli altri. L'algoritmo finisce poichè alla fine resta al peggio un solo vettore ed esse dev'essere non-nullo poichè gli altri erano combinazioni lineari di lui, ma $V$ è uno spazio non-nullo. $\blacksquare$

**Esempio** Consideriamo i vettori

$$(3,4,1) \quad (1,0,1) \quad (0,1,-1) \quad (2,1,3)$$

in $\mathbb{R}^3$.

a) È vero che questi generano $\mathbb{R}^3$?

b) Se sì, allora si trovi una base fra di loro.

a) Per verificare se questi vettori generano $\mathbb{R}^3$, devo prendere un vettore arbitrario $(x,y,z)$ e vedere se esistono sempre soluzioni per il sistema

$$(x,y,z) = \alpha(3,4,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,-1) + \delta(2,1,3)$$

$$\begin{cases} x = 3\alpha + \beta + 2\delta \\ y = 4\alpha + \gamma + \delta \\ z = \alpha + \beta - \gamma + 3\delta \end{cases} \xrightarrow{\text{matrice completa}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 3 & z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & z \\ 4 & 0 & 1 & 1 & y \\ 3 & 1 & 0 & 2 & x \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & z \\ 0 & -4 & 5 & -11 & y-4z \\ 0 & -2 & 3 & -7 & x-3z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & z \\ 0 & 1 & -5/4 & 11/4 & \frac{y-4z}{-4} \\ 0 & -2 & 3 & -7 & x-3z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & z \\ 0 & 1 & -5/4 & 11/4 & \frac{y-4z}{-4} \\ 0 & 0 & 1/2 & -\frac{3}{2} & x-3z+\frac{y-4z}{-2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & z \\ 0 & 1 & -5/4 & 11/4 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \cdots \end{array}\right)$$

Da Rouché-Capelli, questo sistema ha sempre soluzioni — infatti ha sempre infinite soluzioni poiché $\delta$ è variabile libera! Allora questo vuole dire che l'esistenza di soluzioni non dipende dai valori di $x$, $y$ e $z$, per cui qualunque $(x,y,z)$ è combinazione lineare dei vettori dati.

Allora concludiamo che

$$\mathbb{R}^3 = \langle (3,4,1), (1,0,1), (0,1,-1), (2,1,3) \rangle$$

b) Usiamo l'algoritmo dato della dimostrazione per trovare una base.

1) verificare se loro sono l.i.

$$\alpha(3,4,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,-1) + \delta(2,1,3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\delta = 0 \\ 4\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma + 3\delta = 0 \end{cases}$$

Usando eliminazione Gaussiana già fatta ottengo una matrice ridotta dalla matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5/4 & 11/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$ Ci sono infinite soluzioni e allora i vettori ~~sono~~ l.d.

variabili dominanti: $\alpha, \beta, \gamma$

Variabili libere: $\delta$

Facciamo eliminazione da giù in su per semplificare il sistema:

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + \frac{5}{4}R_3 \\ R_1 \to R_1 + R_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Si ottiene allora $(*) \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = 3\delta \end{cases}$ e, quindi, mettendo $\delta = 1$

trovo una soluzione esplicita del sistema:

$$(-1, 1, 3, 1)$$

Cioè,

$$(0,0,0) = (-1)(3,4,1) + 1\cdot(1,0,1) + 3(0,1,-1) + 1\cdot(2,1,3)$$

Allora posso scrivere, per esempio

$(3,4,1) = (1,0,1) + 3(0,1,-1) + (2,1,3)$ e allora $(3,4,1)$ è combinazione lineare degli altri, per cui lo tolgo dall'insieme.

Si ottiene allora $\mathbb{R}^3 = \langle (3,4,1), (1,0,1), (0,1,-1), (2,1,3) \rangle$
$= \langle (1,0,1), (0,1,-1), (2,1,3) \rangle$

Devo adesso verificare se $(1,0,1), (0,1,-1), (2,1,3)$ sono l.i.

$\beta(1,0,1) + \gamma(0,1,-1) + \delta(2,1,3) = (0,0,0) \longleftarrow$ risolvere questo sistema è come risolvere il precedente mettendo $\alpha = 0$!

Quindi da $(*)$ otteniamo

$$\begin{cases} 0 = -\delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = 3\delta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$ e allora i vettori sono l.i.

Conclusione: $\{(1,0,1), (0,1,-1), (2,1,3)\}$ è una base di