09/03/2026

W sottospazio di uno spazio vettoriale V.

- Se ogni elemento di W è combinazione lineare di vettori $v_1, \dots, v_n$, allora $v_1, \dots, v_n$ si dicono generatori di W, e si scrive $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

- Dati vettori $v_1, \dots, v_n$ in V, esiste sempre un sottospazio generato da loro, i cui elementi sono le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$.

Esempio: I vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ generano il sottospazio $\mathbb{R}^2$ di $\mathbb{R}^2$. Ma anche i vettori $(1,0), (0,1)$ e $(1,1)$ generano lo stesso sottospazio...

$$\langle (1,0), (0,1) \rangle = \langle (1,0), (0,1), (1,1) \rangle$$

Perchè?

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$
$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) + 0(1,1)$$

Il vettore $(1,1)$ non ha un ruolo particolare nel secondo insieme di vettori perchè era già generato da $(1,0)$ e $(0,1)$. Infatti, $(1,1) = 1.(1,0) + 1.(0,1)$, quindi qualunque combinazione lineare

$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) =$$
$$= \alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma((1,0) + (0,1))$$

$= (\alpha+\gamma)(1,0) + (\beta+\gamma)(0,1)$

Definizione 1.13 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) e siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori in V. Diciamo che i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono

- linearmente indipendenti se per ogni combinazione lineare $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$ allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
- linearmente dipendenti se, invece, esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli (cioè almeno uno di loro non-nullo) tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$$

Esempi: (in $\mathbb{R}^2$) (1) I vettori $(1,1), (0,1), (1,0)$ sono linearmente indipendenti o dipendenti?

Si ha $\underbrace{(-1)}(1,1) + \underbrace{1}(1,0) + \underbrace{1}(0,1) = (0,0)$

per cui riesco a scrivere una combinazione lineare dei vettori dati che mi restituisce il vettore nullo senza che tutti gli scalari siano nulli. Allora i vettori sono linearmente dipendenti.

(2) I vettori $(1,2)$ e $(-2,5)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti?

$$\alpha(1,2) + \beta(-2,5) = (0,0)$$

$$(\alpha - 2\beta, 2\alpha + 5\beta) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

Coordinata a coordinata.

Osserviamo che questo sistema lineare, essendo omogeneo, ha almeno una soluzione (quella nulla). Allora sappiamo che se essa soluzione è unica, allora i vettori sono linearmente indipendenti. Altrimenti, ci saranno infinite soluzioni e i vettori, in tale caso, saranno linearmente dipendenti.

matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{9}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$ 2 variabili dominanti, nessuna libera e allora 1 unica soluzione.

Allora l'unica soluzione è $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Allora i vettori sono indipendenti.

Esempio In $\mathbb{R}^2$ considero i vettori

$(2,3,-1)$, $(1,2,1)$ e $(0,-1,-3)$

Sono linearmente dipendenti o indipendenti?

$$\alpha(2,3,-1) + \beta(1,2,1) + \gamma(0,-1,-3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to 2R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

α e β Variabili dominanti

γ variabile libera

Allora il sistema ha infinite soluzioni, per cui i vettori dati sono linearmente dipendenti.

Troviamo le soluzioni esatte del sistema:

Proseguendo con eliminazione Gaussiana da giù in su, abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases}$$

Tutte le soluzioni sono della forma

$$(-\gamma, 2\gamma, \gamma) = \gamma(-1, 2, 1)$$

Cioè, le soluzioni del sistema costituiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $(-1,2,1)$.

Allora in particolare abbiamo

$$(-1)(2,3,-1) + 2\cdot(1,2,1) + 1\cdot(0,-1,-3) = (0,0,0)$$

Osservazione: $(0,-1,-3) = (2,3,-1) - 2(1,2,1)$

Cioè, uno dei vettori dati è combinazione lineare degli altri!

Proposizione 1.14: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$) e siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori in V. I vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione: Supponiamo per prima che uno dei vettori è combinazione lineare degli altri. Vogliamo dimostrare che i vettori sono linearmente dipendenti. Prendiamo per ipotesi che il primo vettore v_1 è combinazione lineare degli altri (altrimenti, scambio l'ordine dei vettori).

Allora, abbiamo

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Aggiungendo $-v_1$ ad entrambi lati dell'uguaglianza

ottengo $$-v_1 + v_1 = -v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$
$$0_V = -v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$
Ma adesso questa combinazione lineare, nonostante mi restituisca il vettore nullo, non ha tutti scalari nulli: infatti il primo scalare che compare è -1!
Quindi $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

Adesso, supponiamo invece che i vettori $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente dipendenti. Vogliamo dimostrare che uno di loro è combinazione lineare degli altri.

Siccome sono linearmente dipendenti abbiamo che esiste $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$$

Supponiamo che $\alpha_1 \neq 0$ (altrimenti scambio ordine degli addendi).

Riscalando entrambi lati per $\frac{1}{\alpha_1}$, ottengo

$$v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n = \frac{1}{\alpha_1} 0_V$$

$$v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n = 0_V$$

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

Allora v_1 è combinazione lineare degli altri, come volevamo dimostrare. $\blacksquare$

Definizione 1.15 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Una base di V è un insieme di vettori che generano V e sono linearmente indipendenti.

Esempi: In $\mathbb{R}^2$:

- l'insieme $\{(1,0),(0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^2$. È una base? Per questo basterebbe verificare che oltre a generare lo spazio, sono l.i.

$$\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

Allora $(1,0)$ e $(0,1)$ sono l.i. e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$.

Osservazione: Se fossero dipendenti, uno sarebbe combinazione lineare dell'altro, cioè, sarebbe un riscalamento dell'altro – cosa che evidentemente non accade.

- l'insieme $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ è una base? No, perchè sono l.d.

- l'insieme $\{(2,-1),(3,4)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$?

• Sono generatori? Dobbiamo verificare se è vero che ogni (x,y) in $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di questi vettori.

$$(x,y) = \alpha(2,-1) + \beta(3,4)$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 3\beta \\ y = -\alpha + 4\beta \end{cases}$$

Voglio sapere se questo sistema ha sempre soluzioni per qualunque valore di x e y.

matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x \\ -1 & 4 & y \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{2}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & x/2 \\ -1 & 4 & y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & x/2 \\ 0 & 11/2 & y + \frac{x}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to \frac{2}{11} R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & x/2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} y + \frac{x}{11} \end{array}\right)$$

Allora, dal Teorema di Rouchè-Capelli, questo sistema ha sempre una soluzione per qualunque valori di x e y e allora questo vuole dire che per qualunque vettore (x,y) in $\mathbb{R}^2$, io riesco a trovare α e β tali che

$$(x,y) = \alpha(2,-1) + \beta(3,4), \text{ cioè}$$

$(2,-1)$ e $(3,4)$ generano $\mathbb{R}^2$.

- l.i.?

$$\alpha(2,-1) + \beta(3,4) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

Senza ripetere l'elimanazione Gaussiano, vado direttamente alla matrice ridotta e sostituisco $x=0$ e $y=0$, ottenendo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \frac{3}{2}\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Allora i vettori sono l.i. e quindi

$\{(2,-1),(3,4)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.