

1.1 Numeri complessi

Un numero complesso z può essere scritto nella forma

$$z = x + iy ,$$

essendo x e y due numeri reali, detti rispettivamente la sua *parte reale* e il suo *coefficiente dell'immaginario*, ed essendo i l'*unità immaginaria* caratterizzata dal fatto che

$$i^2 = i \cdot i = -1 .$$

Dati due numeri complessi z e w la loro somma, la loro differenza, il loro prodotto e (qualora sia $w \neq 0$) il loro quoziente

$$z + w \quad z - w \quad zw \quad \frac{z}{w}$$

possono essere calcolati seguendo le ordinarie regole dell'algebra dei numeri reali. L'addizione e la moltiplicazione godono entrambe delle proprietà commutativa ed associativa e la moltiplicazione gode della proprietà distributiva rispetto all'addizione.

Sui numeri complessi si può definire l'operazione di *coniugio* che associa al numero complesso $z = x + iy$ il suo *coniugato* $z^* = x - iy$. Si verificano in modo immediato le seguenti eguaglianze

$$(z+w)^* = z^* + w^* \quad (z-w)^* = z^* - w^* \quad (zw)^* = z^* w^* \quad \left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*} .$$

Si verifica subito anche che parte reale e coefficiente dell'immaginario si ottengono dalle relazioni

$$x = \Re z = \frac{z + z^*}{2} , \quad y = \Im z = \frac{z - z^*}{2i} .$$

Importante è anche la scrittura dei numeri complessi nella forma polare. Posto che siano ϱ e θ le coordinate polari del punto avente coordinate cartesiane x e y , di modo che

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos \theta \\y &= \varrho \sin \theta ,\end{aligned}$$

si ottiene il numero complesso espresso in *forma polare*

$$z = \varrho(\cos \theta + i \sin \theta) .$$

La quantità non negativa ϱ è il *modulo* del numero complesso, indicato anche con $|z|$, mentre θ è la sua *fase*.

Riguardo al modulo si osserva che, risultando

$$zz^* = x^2 + y^2 = \varrho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \varrho^2 = |z|^2 ,$$

si ha

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} .$$

Per quanto riguarda la fase di z , essa non è definita per $z = 0$. Per $z \neq 0$, è definita a meno di multipli di 2π , nel senso che, se θ è un possibile valore della fase, ogni numero $\theta + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ ne rappresenta a sua volta un possibile valore. Tra essi ne esiste uno ed uno solo, diciamolo Θ , tale che $-\pi < \Theta \leq \pi$.

Infine si può utilizzare la forma esponenziale

$$z = \varrho e^{i\theta}$$

coincidente con la forma polare a patto di porre (*formula di Eulero*)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta . \quad (1.1)$$

Si verifica facilmente che la nuova forma è del tutto equivalente a quella polare. Dati infatti due numeri complessi

$$\begin{aligned}z_1 &= \varrho_1 e^{i\theta_1} = \varrho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\z_2 &= \varrho_2 e^{i\theta_2} = \varrho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)\end{aligned}$$

il loro prodotto risulta

$$z_1 z_2 = \varrho_1 \varrho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = \varrho_1 \varrho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

coincidente con quello ottenuto dalla forma polare

$$z_1 z_2 = \varrho_1 \varrho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] ,$$

come si verifica da note formule trigonometriche. Si ha anche

$$z_1^{-1} = \frac{1}{\varrho_1} e^{-i\theta_1} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

in armonia con le regole usuali del calcolo delle potenze.

La formula di Eulero (1.1) trova la sua giustificazione come estensione dello sviluppo in serie di McLaurin dell'esponenziale di un numero reale x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n .$$

Se in questa si sostituisce a x il numero immaginario iy si ottiene formalmente

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n y^n .$$

Ricordando che $i^{2n} = (-1)^n$ e che $i^{2n+1} = i(-1)^n$, la serie può essere spezzata nella somma di due serie, una di numeri reali e una di numeri immaginari, prendendo alternativamente gli elementi di indice pari e di indice dispari. Si ottiene

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} ;$$

poiché nelle due serie si riconoscono le serie di McLaurin delle funzioni $\cos y$ e $\sin y$ rispettivamente, si ha $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Per un generico numero complesso $z = x + iy$ si ha quindi

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

e si riconosce subito che risulta

$$(e^z)^* = e^{z^*} .$$

1.2 Successioni e serie di numeri complessi

Data una successione

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

di numeri complessi, si dice che essa *converge* al numero complesso z e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad (1.2)$$

se, per ogni numero reale $\epsilon > 0$, esiste un intero positivo n_0 (dipendente in generale da ϵ) tale che per ogni $n \geq n_0$ risulti

$$|z_n - z| < \epsilon .$$

Ciò esprime il fatto che, nel piano complesso, per $n \geq n_0$ i numeri complessi z_n devono giacere nell'interno del cerchio di centro z e raggio ϵ .

Se i numeri della successione e il suo limite vengono espressi in parte reale e parte immaginaria ponendo $z_n = x_n + iy_n$ e $z = x + iy$, si dimostra che la (1.2) vale se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y .$$

Data una serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \dots \quad (1.3)$$

si dice che essa converge alla *somma*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad (1.4)$$

se converge a s la successione $s_1, s_2, s_3, \dots$ delle *somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^n z_k ,$$

cioè se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s .$$

Anche per le serie si ha facilmente che, posto $z_n = x_n + iy_n$ e $s = u + iv$, la (1.4) vale se e solo se

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = x \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} y_k = y .$$

E, come nel caso reale, si dimostra che se la serie converge deve essere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = 0 .$$

La serie (1.3) si dice *assolutamente convergente* se è convergente la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$$

dei suoi valori assoluti e, come nel caso delle serie di variabili reali, la convergenza assoluta implica la convergenza ordinaria.

In questo testo si fa uso frequente di *serie bilatere* di numeri complessi indicate con

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k ,$$

associate a corrispondenti *successioni bilatere*

$$\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots$$

Tale serie si dice *convergere* se, per ogni intero n_0 , convergono le serie ordinarie

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} z_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=-\infty}^{n_0} z_k = \sum_{k=-n_0}^{\infty} z_{-k} ,$$

fatto che, come è facile verificare, risulta indipendente dalla scelta dell'intero n_0 , anche se da tale scelta possono dipendere le somme delle due serie, diciamole $s_+(n_0)$ e $s_-(n_0)$, ma non la loro somma. Qualora le due serie convergano, si dice che la serie bilatera converge a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k = s = s_+(n_0) + s_-(n_0) .$$

In qualche caso, come nel calcolo dell'area di un segnale complesso, si considera anche semplicemente la *somma principale di Cauchy* intesa come

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N z_k .$$

Quest'ultima può esistere anche se la serie bilatera non converge in senso ordinario.

1.3 Integrali di funzioni complesse di variabile reale

Data una funzione complessa $s(t) = x(t) + iy(t)$ della variabile reale t , essendo $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente la sua parte reale e il suo coefficiente dell'immaginario, l'integrale di $s(t)$ nell'intervallo (α, β) è dato da

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dt ,$$

naturalmente sotto la condizione che esistano gli integrali di $x(t)$ e di $y(t)$.

Si possono poi definire gli integrali della funzione complessa $s(t)$ di variabile reale estesi a semirette

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} s(t) dt &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} s(t) dt \\ \int_{-\infty}^{\alpha} s(t) dt &= \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \int_{\gamma}^{\alpha} s(t) dt \end{aligned}$$

e l'integrale esteso a tutto l'asse reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = \int_{-\infty}^{\alpha} s(t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} s(t) dt$$

che risulta ovviamente indipendente da α .

Tuttavia in molte situazioni, ad esempio nel calcolo dell'area di un segnale a tempo continuo, si considera il *valore principale di Cauchy* dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T s(t)dt ,$$

che può esistere anche se non esiste l'integrale sopra definito.

1.4 Continuità e derivabilità di funzioni di variabile complessa

Una funzione $f(z)$ della variabile complessa z si dice *continua* in z_0 se è definita nel punto z_0 e in un suo intorno del piano complesso e se per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ (eventualmente dipendente da ϵ) tale che non appena risulti

$$|z - z_0| < \delta$$

si abbia

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon .$$

Il concetto è quindi simile a quello della continuità di una funzione di variabile reale. La differenza sta nel fatto che la funzione $f(z)$ deve differire in modulo da $f(z_0)$ meno di ϵ in tutto un cerchio di centro z_0 e raggio δ nel piano complesso. La continuità di $f(z)$ in z_0 viene anche espressa mediante la consueta notazione

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) .$$

La funzione $f(z)$ si dice *derivabile* in z_0 con derivata $f'(z_0)$ se è continua in un intorno di z_0 e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) ,$$

ovvero se

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) .$$

Nonostante la somiglianza con la definizione della derivabilità delle funzioni continue, il concetto richiede maggiore cautela, potendo accadere che il limite possa dipendere da come tende a zero l'incremento Δz , che è complesso. Per esempio una funzione semplice come $f(z) = \Re z$ non ammette derivata in nessun punto del piano complesso. Se si pone infatti $\Delta z = \Delta \varrho e^{i\theta}$ con modulo $\Delta \varrho$ e fase θ fissa si ottiene

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Re(z_0 + \Delta z) - \Re z_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta \varrho \rightarrow 0} \frac{\Delta \varrho \cos \theta}{\Delta \varrho e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \cos \theta ,$$

dipendente da θ .

Sono derivabili, con le consuete regole della derivazione valide per le funzioni di variabile reale, i polinomi e le funzioni razionali in z (con l'eccezione dei punti nei quali si annulla il denominatore) e la funzione esponenziale e^z . Valgono le regole usuali sulla derivazione della somma, della moltiplicazione e della divisione di funzioni. In particolare la derivata di una funzione composta $f(z) = g[h(z)]$ di funzioni derivabili risulta

$$f'(z) = g'[h(z)]h'(z) .$$

Ad esempio la funzione $f(z) = e^{g(z)}$ ha derivata $f'(z) = e^{g(z)}g'(z)$.

Una funzione $f(z)$ di variabile complessa si dice *analitica* in un punto z_0 se è derivabile in z_0 e in un intorno aperto di z_0 . Uno dei più importanti risultati della teoria delle funzioni di variabile complessa è dato dal seguente teorema, per la cui dimostrazione si rinvia a testi specializzati (ad esempio [7]).

TEOREMA 1.1 *Una funzione $f(z)$ che sia analitica in una regione aperta R del piano complesso vi è indefinitamente derivabile.*

Questo implica che tutte le derivate $f^{(n)}(z)$ esistono e sono analitiche in R .

1.5 Serie di potenze

Si consideri una serie di funzioni (reali o complesse)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

della variabile x (reale o complessa). La serie si dice *convergente* in un punto x_0 se è convergente la serie numerica

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) .$$

L'insieme dei punti x_0 in cui la serie converge costituisce la *regione di convergenza* della serie e i valori in essa assunti dalla somma della serie costituiscono la funzione *somma* della serie di funzioni.

Particolarmente importanti sono le serie di potenze di variabile complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n . \tag{1.5}$$

Riguardo ad esse si dimostra facilmente il seguente teorema.

TEOREMA 1.2 *Se la serie (1.5) converge in un punto z_0 , con $|z_0| > 0$, essa converge nell'interno di tutto il cerchio con centro nell'origine e raggio $|z_0|$.*

Per quanto riguarda la prova, se la serie converge in z_0 si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| |z_0|^n = 0$$

di modo che la successione $|a_n| |z_0|^n$ è limitata ed esiste un numero reale positivo M tale che per ogni $n = 0, 1, \dots$, sia $|a_n| |z_0|^n \leq M$. Allora per ogni z con $|z| < |z_0|$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Poiché l'ultima serie geometrica converge in quanto $|z/z_0| < 1$, la serie (1.5) è assolutamente convergente e quindi è convergente in z . Si conclude che l'interno del cerchio di raggio $|z_0|$ e centro nell'origine fa parte della regione di convergenza della serie. Da questo consegue subito un semplice corollario.

COROLLARIO 1.1 *Se la regione di convergenza della somma (1.5) non si riduce al punto 0 o non coincide con il piano complesso, il suo interno è l'interno di un cerchio centrato nell'origine e la serie non converge in alcun punto esterno al cerchio.*

Un altro importante risultato per la cui dimostrazione si rinvia a [7] è dato dal seguente teorema.

TEOREMA 1.3 *Se la serie (1.5) converge, all'interno del suo cerchio di convergenza la sua somma è una funzione analitica.*

1.6 Integrali di Laplace

Le proprietà di convergenza delle trasformate di Laplace si basano su alcuni importanti risultati sugli *integrali di Laplace*, per i quali si rinvia a [17]. Data una funzione $f(t)$ (reale o complessa) di una variabile reale t definita per $t \geq 0$, si definisce il suo *integrale di Laplace* (coincidente con quella che abbiamo chiamato la trasformata di Laplace unilatera), l'integrale

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1.6)$$

con p variabile complessa. La regione del piano complesso costituita dai valori di p per cui l'integrale di Laplace esiste si dice la sua *regione di convergenza*.

Si hanno in proposito i seguenti risultati fondamentali.

TEOREMA 1.4 *Se l'integrale (1.6) esiste in un punto p_0 del piano complesso, esiste per ogni p tale che $\Re p > \Re p_0$.*

Da questo segue il semplice corollario.

COROLLARIO 1.2 *Se la regione di convergenza dell'integrale di Laplace (1.6) non è vuota o non coincide con il piano complesso, il suo interno è un semipiano destro aperto del piano complesso e l'integrale non esiste nell'interno del semipiano sinistro corrispondente.*

E infine

TEOREMA 1.5 *All'interno della sua regione di convergenza l'integrale di Laplace (1.6) è una funzione analitica.*

1.7 Potenze di matrici

Nel testo si sono considerate potenze e serie di potenze di matrici quadrate nel caso in cui queste siano *semplici*. Si ricorda che una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di ordine n è semplice se essa è simile a una matrice diagonale, cioè se e solo se esiste una matrice non singolare $\mathbf{T}$ tale che

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1},$$

essendo $\mathbf{\Lambda} = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ una matrice diagonale. Per inciso, gli elementi della diagonale della matrice $\mathbf{\Lambda}$ sono gli *autovalori* della matrice $\mathbf{A}$ dato che il polinomio caratteristico di quest'ultima risulta

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det(\lambda \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1}) = \det \mathbf{T} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) \det \mathbf{T}^{-1} \\ &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i). \end{aligned}$$

Se ora si scrive

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{\Delta}_i,$$

essendo $\mathbf{\Delta}_i$ una matrice quadrata costituita da tutti 0 ad eccezione di un 1 nel posto i -simo della diagonale principale, la matrice $\mathbf{A}$ può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{T}\mathbf{\Delta}_i\mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{H}_i.$$

La matrice $\mathbf{H}_i = \mathbf{T}\mathbf{\Delta}_i\mathbf{T}^{-1}$ è detta il *costituente* di $\mathbf{A}$ associato all'autovalore λ_i .

Poiché le matrici Δ_i sono ovviamente *idempotenti*, risultando $\Delta_i \Delta_i = \Delta_i$ e congiuntamente *nihilpotenti* risultando $\Delta_i \Delta_j = \mathbf{0}$ per $i \neq j$, le stesse proprietà sono ereditate dai costituenti. Si ha infatti

$$\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i = \mathbf{T} \Delta_i \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \Delta_i \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \Delta_i \Delta_i \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{H}_i$$

e, per $j \neq i$,

$$\mathbf{H}_i \mathbf{H}_j = \mathbf{T} \Delta_i \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \Delta_j \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \Delta_i \Delta_j \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{0} .$$

Mediante autovalori e costituenti è possibile esprimere facilmente le potenze di $\mathbf{A}$. Risulta infatti

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^n \mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \mathbf{T} \Delta_i \mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \mathbf{H}_i .$$

1.8 Spazi vettoriali di funzioni

In questo testo si fa più volte cenno a classi di funzioni che costituiscono spazi vettoriali complessi. Si dà qui allora qualche definizione in proposito, senza alcuna pretesa di completezza.

DEFINIZIONE 1.1 Uno *spazio vettoriale complesso* è un insieme V di elementi, detti *vettori*, tale che

i) su di esso è definita un'operazione, detta *addizione vettoriale* che è commutativa, associativa, dotata di elemento neutro (il vettore 0) e rispetto alla quale ogni vettore è dotato di opposto;

ii) per ogni vettore $v \in V$ e ogni numero complesso α (detto in questo contesto uno *scalare*) si ha la *moltiplicazione per uno scalare*, $\alpha v \in V$, che soddisfa le seguenti proprietà:

- a) $1 v = v$;
- b) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
- c) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
- d) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$.

Oltre agli esempi ben noti dall'algebra lineare di spazi vettoriali a dimensioni finite come $\mathbb{C}^n$ un esempio di spazio vettoriale complesso è dato dall'insieme di tutte le funzioni complesse definite su $\mathbb{R}$, con l'ordinaria addizione di funzioni.

DEFINIZIONE 1.2 Uno spazio vettoriale complesso V si dice *a prodotto interno* se è definita in esso un'operazione, detta appunto prodotto interno, che associa ad ogni coppia di vettori u, v appartenenti a V un numero complesso indicato con (u, v) . L'operazione prodotto interno deve possedere le seguenti proprietà:

- i) $(v, u) = (u, v)^*$;
- ii) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;
- iii) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$;
- iv) $(u, u) \geq 0$ per ogni $u \in V$;
- v) $(u, u) = 0$ se e solo se $u = 0$.

Su uno spazio siffatto è possibile introdurre la *norma* $\|v\|$ di un vettore come il numero non negativo definito dalla relazione

$$\|v\|^2 = (v, v) .$$

Due importanti disuguaglianze caratterizzanti questi spazi e che possono essere facilmente dimostrate sono la *disuguaglianza di Schwarz*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| ,$$

e la *disuguaglianza triangolare*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| .$$

Un primo esempio di spazio vettoriale di funzioni con prodotto interno è dato dalla classe $\mathcal{C}$ delle funzioni complesse di variabile reale definite sull'intervallo $[0, T]$ e ivi continue. Il lettore può verificare agevolmente che si tratta di uno spazio vettoriale complesso, in quanto la moltiplicazione di una funzione per uno scalare complesso non ne altera la continuità e l'addizione di due funzioni continue è continua. Il prodotto interno di due funzioni $u(t)$ e $v(t)$ può essere definito come

$$(u, v) = \int_0^T u(t) v^*(t) dt .$$

L'esistenza dell'integrale è garantita dalla continuità della funzione $u(t)v^*(t)$ su $[0, T]$. Il lettore può verificare che esso gode delle proprietà del prodotto interno sopra elencate.

Un altro esempio di spazio vettoriale complesso di funzioni è dato da $\mathcal{L}_2$, la classe delle funzioni complesse $v(t)$ di variabile reale, che siano *quadrato-integrabili*, cioè per le quali esista l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt .$$

Anche per $\mathcal{L}_2$ si può definire il prodotto interno

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt .$$

1.9 Funzionali e operatori

Si dice *funzionale* una mappa avente come dominio un insieme di funzioni $\mathcal{F}$ e come codominio il campo reale $\mathbb{R}$ o il campo complesso $\mathbb{C}$, cioè una funzione $\phi : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{G}$ (dove $\mathbb{G}$ può essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) che associa ad una funzione $f \in \mathcal{F}$ un numero (reale o complesso) $\phi[f]$. E a seconda che il codominio sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ si parla di *funzionale reale* o *funzionale complesso*.

Il concetto non va confuso con quello di funzione di funzione, come potrebbe suggerire la notazione $\phi[f]$. L'uso delle parentesi quadre è utile per evitare questa confusione, anche se la distinzione è sempre evidente dal contesto.

Alcuni esempi tratti da argomenti di questo testo possono essere utili a illustrare il concetto. L'*area* di un segnale continuo $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, definita come

$$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt ,$$

è un funzionale (in generale complesso) che associa al segnale s (una funzione) la sua area A_s (un numero). In questo caso l'insieme $\mathcal{F}$ è costituito da tutte le funzioni complesse di variabile reale che siano integrabili su tutto $\mathbb{R}$. Anche l'energia del segnale $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, definita da

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt ,$$

è un funzionale, in questo caso reale (e anzi non negativo). Area e energia di segnali discreti sono anch'essi funzionali definiti sull'insieme delle funzioni aventi dominio $\mathbb{Z}(T)$.

Un altro esempio più sottile di funzionale reale (non negativo) è dato dalla *durata minima* D_s di un segnale $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, definita la minima ampiezza di un intervallo dell'insieme $\mathbb{R}$ al di fuori del quale il segnale sia nullo.

Anche se in matematica il termine ha un significato molto più generale, includente per inciso anche quello di funzionale, si definisce qui *operatore* una mappa avente come dominio un insieme di funzioni $\mathcal{F}$ e come codominio un altro insieme di funzioni $\mathcal{G}$, cioè una funzione $\varphi : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{G}$ che associa a una funzione f appartenente a $\mathcal{F}$ una funzione $g = \varphi[f]$ con g appartenente a $\mathcal{G}$.

Gli esempi di operatore che appaiono in questo testo sono numerosi. Ad esempio una *trasformazione* $(\mathbb{I}, \mathbb{U}, \varphi)$ è un operatore che associa al segnale d'ingresso x , definito sul dominio d'ingresso $\mathbb{I}$, il segnale d'uscita $y = \varphi[x]$, definito sul dominio d'uscita $\mathbb{U}$.

Anche la *trasformata di Fourier*, ad esempio nella sua versione per segnali continui, è un operatore che associa a un segnale s , definito su $\mathbb{R}$, la sua trasformata di Fourier $S = \mathcal{F}[s]$, un segnale definito ancora su $\mathbb{R}$.

La *trasformata di Laplace* è a sua volta un operatore che associa a un segnale s definito su $\mathbb{R}$ la sua trasformata di Laplace $S_{\mathcal{L}}$, una funzione definita su $\mathbb{C}$ o su un suo sottoinsieme Γ_s (la regione di convergenza).

Il concetto di funzionale può risultare connesso a quello di operatore, in quanto se un operatore φ applicato a una funzione f dà luogo ad una funzione g e questa è calcolata in un punto determinato u_0 del suo dominio, si ottiene un numero che costituisce un funzionale ϕ della funzione originale f . In formule

$$\phi[f] = \varphi[f|u_0] .$$

Un esempio illuminante è il seguente. La trasformata di Fourier (a tempo continuo) $\mathcal{F}$ è un operatore che associa al segnale s la sua trasformata S . Come è noto, la regola dell'area dice che la trasformata S calcolata nell'origine fornisce l'area di s che, come si è visto, è un funzionale. In altri termini il funzionale area A_s può essere interpretato come frutto dell'applicazione dell'operatore $\mathcal{F}$ e del calcolo del risultato in 0. In formule

$$A_s = \mathcal{F}[s|0] .$$

In quest'ottica ad esempio il funzionale di aggiornamento di stato nella descrizione globale di un sistema

$$s(t) = G[s(t_0), x_{[t_0, t]|t}]$$

è definito funzionale in quanto associa al segnale d'ingresso x (una funzione), in dipendenza dallo stato iniziale $s(t_0)$, il valore assunto dallo stato (un numero) nell'istante attuale t .

