04/03/2026

W_1 = Soluzioni di $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3z=0 \end{cases}$ in $\mathbb{R}^3$ $\rightsquigarrow$ Sottospazio di $\mathbb{R}^3$; ogni elemento di W è un riscalamento di $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ (ovvero, una combinazione lineare del singolo vettore $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$)

W_2 = soluzioni di $\begin{cases} x+y-2t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ Sottospazio di $\mathbb{R}^4$; ogni elemento di W è una combinazione lineare di $(-1,1,0,0)$ e $(2,0,-1,1)$

Definizione 1.11: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$. Sia W un suo sottospazio. W si dice generato da un insieme di vettori $v_1, \dots, v_n$ se ogni elemento di W è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. In tale caso, questi $v_1, \dots, v_n$ si dicono generatori di W e si scrive

$$W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Esempio: (1) Negli esempi riportati sopra,

$$W_1 = \left\langle \left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right) \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$W_2 = \langle (-1,1,0,0), (2,0,-1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

(2) Generatori di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle \quad \text{poichè}$$

ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $(1,0)$ e $(0,1)$:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

$$(a,b) = \underbrace{a}\,(1,0) + \underbrace{b}\,(0,1) + \underbrace{0}\,(1,1)$$

È anche vero che $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1), (1,1) \rangle$

Attenzione: In uno spazio vettoriale V, V è sottospazio di se stesso. Anche $\{0_V\}$ è un sottospazio di V poichè ogni combinazione lineare del vettore nullo è uguale a 0_V.

Proposizione 1.12 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). Dati vettori $v_1, \dots, v_n$ in V esiste un sottospazio di V generato da loro, ed esso è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$.

Dimostrazione: Per dimostrare che tale insieme è un sottospazio devo dimostrare che una combinazione lineare arbitraria di elementi di quest' insieme appartiene ancora al insieme.
Prendiamo

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

e

$$w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e $\mu_1, \dots, \mu_n$ sono scalari in $\mathbb{k}$.
Adesso prendo una combinazione lineare di v e w, ovvero

$$\alpha v + \beta w \qquad \alpha, \beta \text{ in } \mathbb{k}.$$

$$= \alpha(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + \beta(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n)$$

$$= (\alpha\lambda_1 v_1 + \dots + \alpha\lambda_n v_n) + (\beta\mu_1 v_1 + \dots + \beta\mu_n v_n)$$

$$= (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) v_1 + (\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2) v_2 + \dots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) v_n$$

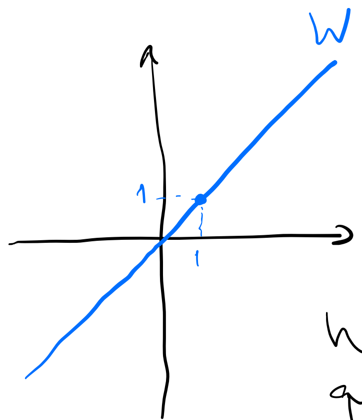
Allora $\alpha v + \beta w$ è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ e allora l' insieme W di combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$ è un sottospazio di V.
In più si ha che

$$W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle . \quad \blacksquare$$

Esempi: In $\mathbb{R}^2$:

Riusciamo ad identificare geometricamente gli elementi del sottospazio generato da $(1,1)$?

$$W = \langle (1,1) \rangle$$
$$= \{\text{combinazioni lineari di } (1,1)\}$$
$$= \{\lambda(1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



W è l'insieme di soluzioni di qualche sistema di equazioni omogeneo?

Questi punti sono infatti le soluzioni dell'equazione $y - x = 0$ omogenea. → equazione Cartesiana della retta!

Infatti, dati vettori in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, il sottospazio generato da loro è sempre l'insieme di soluzioni di un certo sistema di equazioni omogeneo — queste equazioni si dicono le equazioni Cartesiane del sottospazio.

In $\mathbb{R}^3$: $\quad W = \langle (1,3,0), (0,-1,1) \rangle$

Guardiamo chi sono i punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ che sono combinazioni lineari di $(1,3,0)$ e $(0,-1,1)$.

$$(x,y,z) = \alpha(1,3,0) + \beta(0,-1,1) \text{ per certi } \alpha \text{ e } \beta$$

Guardando coordinata a coordinata,

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 3\alpha - \beta \\ z = \beta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \text{---} \\ \boxed{y = 3x - z} \\ \text{---} \end{cases}$$

equazione cartesiana di W.

e allora W è un piano di $\mathbb{R}^3$.

Esempio $\quad V$ = spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dove $b^2 - 4ac > 0$

Le soluzioni sono del tipo $y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$ dove r_1 e r_2 sono soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$

Siccome tutte le soluzioni sono combinazioni lineari di $e^{r_1 x}$ e $e^{r_2 x}$ allora

$$V = \langle e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \rangle.$$