03/03/2026

Proposizione 1.8 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) e sia W un suo sottoinsieme. Allora si ha:

(1) W è un sottospazio di V se e solo se ogni combinazione lineare di due elementi di W appartiene a W.

(2) Se W è un sottospazio di V, allora W è uno spazio vettoriale se consideriamo le stesse operazioni presenti in V.

Attenzione: L'espressione "A se e solo se B" è la stessa che "se A allora B e se B allora A"

Dimostrazione: (1) Devo dimostrare due cose:

(a) Se W è un sottospazio di V, allora ogni combinazione lineare di due elementi di W appartiene a W.

(b) Se ogni combinazione lineare di due elementi di W appartiene a W, allora W è un sottospazio di V.

Partiamo dalla affermazione (a). Qui prendiamo per ipotesi che W è un sottospazio di V. Dobbiamo dimostrare la tesi, ovvero che ogni combinazione lineare di due elementi di W appartiene a W. Prendiamo allora due elementi arbitrari di W, diciamo w_1 e w_2 e prendiamo anche due scalari λ_1 e λ_2 in $\mathbb{k}$. Vogliamo dimostrare che $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ appartiene a W. Siccome per ipotesi, W è un sottospazio, i riscalamenti $\lambda_1 w_1$ e $\lambda_2 w_2$ appartengono entrambi a W. Siccome

W è sottospazio, la somma dei vettori $\lambda_1 w_1$ e $\lambda_2 w_2$ (entrambi appartenenti a W) è ancora un vettore di W.
Allora $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ appartiene a W.

Dimostriamo adesso l'affermazione (b), ovvero che se ogni combinazione lineare di due elementi di W appartiene a W, allora W è sottospazio.

ipotesi

tesi

Devo dimostrare allora che per w_1 e w_2 in W si ha

- λw_1 appartiene a W. Osserviamo che

$$\lambda w_1 \overset{\checkmark}{=} \lambda w_1 + \underbrace{0 \cdot w_1}_{0_V} \longleftarrow$$ per ipotesi questa combinazione lineare appartiene a W.

- $w_1 + w_2$ appartiene a W

$= 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$ appartiene a W poiché è una combinazione lineare di elementi in W.

! $\lambda \cdot 0_V \underset{(3)}{=} \lambda \cdot (0_V + 0_V) \underset{(5)}{=} \lambda 0_V + \lambda 0_V$

Aggiungendo l'opposto di $\lambda 0_V$ ad entrambi lati, otteniamo

$$\underbrace{\lambda 0_V + (-\lambda 0_V)}_{0_V} = (\lambda 0_V + \lambda 0_V) + (-\lambda 0_V)$$

$$0_V = \lambda 0_V + \underbrace{(\lambda 0_V + (-\lambda 0_V))}_{0_V}$$

$$0_V = \lambda 0_V + 0_V$$

allora $0_V = \lambda 0_V$

non necessario.

Quindi W è un sottospazio.

(a) Siccome W è chiuso per le operazioni di somma e riscalamento in V, e siccome queste operazioni soddisfano gli assiomi (1) — (8) in V, lo soddisfano anche in W. ☒

Conclusione Per verificare se $W \subseteq V$ è un sottospazio basta allora guardare combinazioni lineari di elementi in W.

Esempio $V = \mathbb{R}^4$

W = soluzioni di $x_1 + x_2 = -x_3 + x_4$

Prendiamo due vettori di W, (a, b, c, d) e $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Questo vuole dire $a+b = -c+d$ e $\alpha+\beta = -\gamma+\delta$.

Prendiamo due scalari λ e μ. La domanda è se

$$\lambda(a, b, c, d) + \mu(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ appartiene a } W.$$

$$= (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) + (\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\delta)$$

$$= (\lambda a + \mu\alpha, \lambda b + \mu\beta, \lambda c + \mu\gamma, \lambda d + \mu\delta)$$

$$\underbrace{(\lambda a + \mu\alpha) + (\lambda b + \mu\beta)} \overset{?}{=} -(\lambda c + \mu\gamma) + (\lambda d + \mu\delta)$$

$$(\lambda a + \lambda b) + (\mu\alpha + \mu\beta)$$

$$= \lambda(a+b) + \mu(\alpha+\beta)$$

$$= \lambda(-c+d) + \mu(-\gamma+\delta)$$

$$= -\lambda c + \lambda d - \mu\gamma + \mu\delta \quad \checkmark$$

Allora W è un sottospazio.

Ricordiamo che un'equazione lineare si dice omogenea se il termine noto è zero, cioè se l'equazione è della forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 .$$

Un sistema di equazioni lineari si dice omogeneo se tutte le equazioni sono omogenee.

Proposizione 1.9 Consideriamo un sistema di m equazioni lineari omogeneo

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

a n incognite con coefficienti in $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Allora l'insieme delle soluzioni di questo sistema è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

Dimostrazione: Sia W l'insieme delle soluzioni del sistema, e consideriamo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ due soluzioni. Prendiamo λ e μ scalari in $\mathbb{K}$ e consideriamo la combinazione lineare

$$\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \mu(\beta_1, \dots, \beta_n) .$$

Vogliamo dimostrare che tale combinazione lineare è soluzione del sistema.

$$\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \mu(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \dots, \lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$$

Guardiamo se questo vettore è soluzione dell'equazione j (dove $1 \leq j \leq m$)

$$a_{j_1}(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)+a_{j_2}(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2)+\dots+a_{j_n}(\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)=$$
$$=a_{j_1}\lambda\alpha_1+a_{j_1}\mu\beta_1+a_{j_2}\lambda\alpha_2+a_{j_2}\mu\beta_2+\dots+a_{j_n}\lambda\alpha_n+a_{j_n}\mu\beta_n=$$
$$=\left(a_{j_1}\lambda\alpha_1+a_{j_2}\lambda\alpha_2+\dots+a_{j_n}\lambda\alpha_n\right)+\left(a_{j_1}\mu\beta_1+a_{j_2}\mu\beta_2+\dots+a_{j_n}\mu\beta_n\right)$$
$$=\lambda\underbrace{\left(a_{j_1}\alpha_1+a_{j_2}\alpha_2+\dots+a_{j_n}\alpha_n\right)}_{=0 \text{ poichè } (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \text{ è soluzione.}}+\mu\underbrace{\left(a_{j_1}\beta_1+a_{j_2}\beta_2+\dots+a_{j_n}\beta_n\right)}_{=0 \text{ poichè } (\beta_1,\dots,\beta_n) \text{ è soluzione.}}$$
$$=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$$

Quindi $\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+\mu(\beta_1,\dots,\beta_n)$ è soluzione e allora W è un sottospazio. $\boxtimes$

Osservazione: Si osservi che se il sistema ha una sola equazione, allora l'affermazione sopra ci dice che l'insieme di soluzioni di una equazione lineare omogenea è un sottospazio.

Inoltre, si osservi che le soluzione di un sistema di m equazioni formano un insieme che è ottenuto come l'intersezione degli insiemi di soluzioni di ogni singola equazione.

Domanda: Dati m sottospazi vettoriali $W_1, W_2, \dots, W_m$ è vero che $\underbrace{W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_m}_{\text{elementi in comune a } W_1, W_2, \dots, W_m}$ è un sottospazio?

Lemma 1.10 Dati m sottospazi $W_1, \dots, W_m$ di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), si ha che $W_1 \cap \dots \cap W_m$ è un sottospazio di V.

Dimostrazione: Prendiamo v e w in $W_1 \cap \dots \cap W_m$
(cioè v appartiene a tutti $W_1, \dots, W_m$
w appartiene a tutti $W_1, \dots, W_m$)

Prendiamo λ e μ scalari e consideriamo la combinazione lineare

$$\lambda v + \mu w$$

Siccome v appartiene a W_1 e w appartiene a W_1, e W_1 è sottospazio $\lambda v + \mu w$ appartiene a W_1.

Siccome v e w appartengono a W_2 e W_2 è sottospazio, allora $\lambda v + \mu w$ appartiene a W_2

$\vdots$

Siccome v e w appartengono a W_m e W_m è sottospazio, allora $\lambda v + \mu w$ appartiene a W_m.

Allora $\lambda v + \mu w$ appartiene a $W_1 \cap \dots \cap W_m$ e l'intersezione è un sottospazio. $\blacksquare$

Esempio
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

Attenzione: Un sistema omogeneo ha sempre almeno una soluzione: la soluzione nulla!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

Colonna libera

Colonne dominanti

Per ogni valore della variabile libera z, ottengo $y = -\frac{1}{2}z$

$$x = -y + z = \frac{1}{2}z + z = \frac{3}{2}z$$

Tutte le soluzioni sono della forma

$$\left(\frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}z, z\right) = z\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Allora le soluzioni del mio sistema, che so di essere un sottospazio, sono tutte riscalamenti di $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Esempio
$$\begin{cases} x + y - 2t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

libere

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ è già ridotta

dominanti

Per ogni y e t scelti liberamente,

Ottengo le soluzioni

$$x = -y + 2t$$
$$z = -t$$

Le mie soluzioni sono della forma:

$$(-y+2t, \ y \ , -t \ , \ t) = y(-1, 1, 0, 0) + t(2, 0, -1, 1)$$

Allora tutte le mie soluzioni sono combinazioni lineari di $(-1,1,0,0)$ e $(2,0,-1,1)$.