02/03/2026

TUTORATO: Giovedì, 16:30 – 18:30
Aula A - Nasini, dal 05/03
(nel 12/03, 19/03, 26/03 in aula H14)

Lemma 1.5 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$). Allora si ha per ogni v in V:

(1) $0 \cdot v = 0_V$

(2) $(-1)\cdot v$ è il vettore opposto di v.

Dimostrazione: (1) già dimostrato

(2) Per vedere che $(-1)\cdot v$ è il vettore opposto di v io devo sommarli ed ottenere 0_V.

$$v + (-1)\cdot v \underset{(8)}{=} 1\cdot v + (-1)\cdot v \overset{(6)}{=} (1+(-1))\cdot v$$
$$= 0 \cdot v = 0_V$$

parte (1) di questo lemma.

Allora risulta che $(-1)\cdot v$ è il vettore opposto di v. $\blacksquare$

D'ora in poi il vettore opposto del vettore v si scrive $-v = (-1)\cdot v$.

Osservazione: Dimostriamo anche che l'elemento opposto di v è unico. Supponiamo che v^* e v^{**} sono entrambi opposti di v, cioè $v + v^* = 0_V$ e $v + v^{**} = 0_V$

Partendo dalla seconda uguaglianza, e sommando v^* in entrambi lati, ottengo

$$v^* + (v + v^{**}) = v^* + 0_V$$

$$\underset{(3)}{\rightsquigarrow} \quad v^* + (v + v^{**}) = v^*$$

$$\underset{(1)}{\rightsquigarrow} \quad (v^* + v) + v^{**} = v^*$$

$$\underset{(4)}{\rightsquigarrow} \quad 0_V + v^{**} = v^*$$

$$\underset{(3)}{\rightsquigarrow} \quad v^{**} = v^*$$

Conclusione: Per ogni vettore v in V esiste un'unico opposto, ed esse è $(-1)\cdot v$.

Definizione 1.6 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). Dati n vettori in V $v_1, v_2, \dots, v_n$, una combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n$ è un elemento di V ottenuto come

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono scalari in $\mathbb{k}$.

Esempi (1) Prendiamo $V = \mathbb{R}^2$

il vettore $(3,2)$ è una combinazione lineare di $(1,1)$ e $(1,0)$.

$$(3,2) = 2\cdot(1,1) + (1,0)$$

- È vero che il vettore $(6,-3)$ è combinazione lineare di $(1,1)$ e $(1,0)$?

$$(6,-3) = -3(1,1) + 9(1,0)$$

infatti $(6,-3) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 1 \\ -3 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 9 \\ -3 = \alpha \end{cases}$$

guardando coordinata a coordinata

- È vero che ogni vettore (a,b) di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $(1,0)$ e $(0,1)$?

Sì: $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$

Esempio Supponiamo che a, b e c sono numeri reali tali che $b^2-4ac>0$. Allora, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$ay'' + by' + cy = 0$$

sono combinazioni lineari di $\underbrace{e^{r_1 x}}$ e $\underbrace{e^{r_2 x}}$, dove r_1 e r_2 sono soluzioni di $ax^2+bx+c=0$, poichè ogni soluzione è della forma $y(x) = \underbrace{k_1}\, e^{r_1 x} + \underbrace{k_2}\, e^{r_2 x}$

Scalari!!!

Esempio È vero che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$?

No! $(0,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1)$

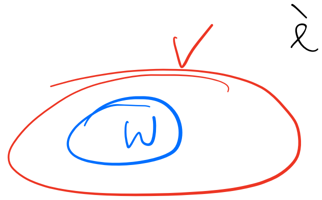
$$\iff \begin{cases} 0 = \alpha \\ 1 = 0 \\ 0 = \beta \end{cases}$$

Coordinata a coordinata

Sistema impossibile

Allora $(0,1,0)$ non è combinazione lineare di $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$

Definizione 1.7 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme W per il quale si ha:



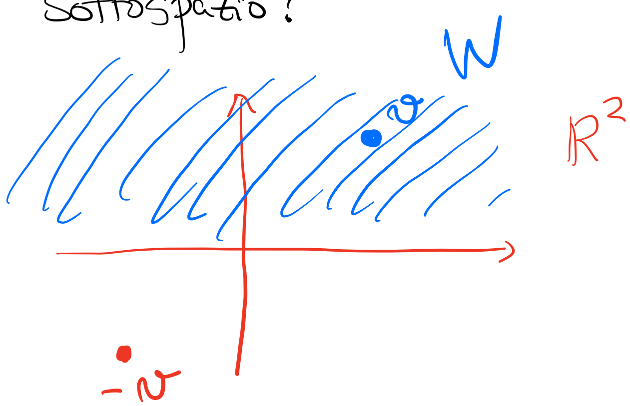
(1) Per ogni w in W, e per ogni λ in $\mathbb{K}$,

$$\lambda w \in W$$

(2) Per ogni $w_1, w_2 \in W$, si ha

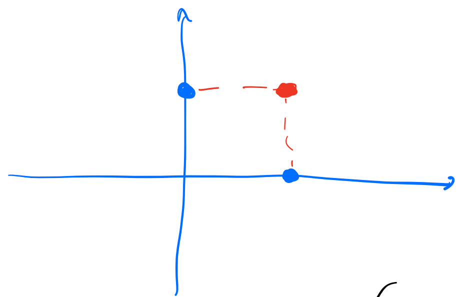
$$w_1 + w_2 \in W.$$

Esempi (1) Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ i cui elementi hanno la seconda coordinata positiva. È un sottospazio?



W non è un sottospazio poichè se riscalo un vettore con seconda coordinata positiva per uno scalare negativo ottengo un elemento che non appartiene a W.

Esempio Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato dai punti che si trovano sugli assi.



È sottospazio di $\mathbb{R}^2$?
No poichè la somma di due punti in assi diversi non è su nessun dei due assi.
(nonostante non ci siano problemi con il riscalamento!)

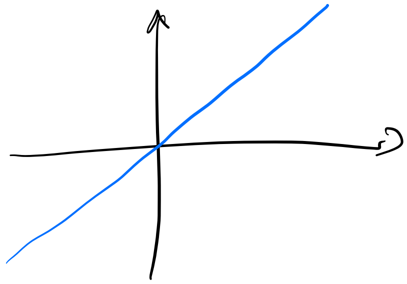
Esempio: Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ formato dagli elementi della forma $\frac{1}{x}$ con $x \in \mathbb{R}$.

Questi numeri sono esattamente i numeri reali invertibili, cioè i numeri reali diversi da zero!
Allora no! W non è un sottospazio vettoriale, poichè riscalando qualunque numero reale per 0 mi da il vettore nullo.

osservazione: Se W è un sottospazio, allora per forza 0_V deve appartenere a W poichè 0_V è il riscalamento per 0 di qualunque dato vettore in W. Per lo stesso ragionamento, dato che il vettore opposto si ottiene riscalando per -1, l'opposto di ogni vettore in W deve appartenere a W se W è un sottospazio!

Esempio Prendiamo W l'insieme di $\mathbb{R}^2$ per cui la prima coordinata è uguale alla seconda.

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$



W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

(1) Dato (x,y) in W, abbiamo che (x,y) è della forma (x,x) e quindi riscalando per λ si ottiene $(\lambda x, \lambda x)$ che ha la stessa proprietà, e allora appartiene a W.

(2) Prendiamo due punti di W, (x_1, x_1) e (x_2, x_2). Sommandoli, otteniamo

$$(x_1, x_1) + (x_2, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

e questo appartiene ancora a W.

Esempio (su wooclap)

Quali dei seguenti vettori non è una combinazione lineare di $(1,1,1)$ e $(1,0,0)$ in $\mathbb{R}^3$?

(1) $(5,3,3) = 3(1,1,1) + 2(1,0,0)$

(2) $(0,1,1) = (1,1,1) + (-1)(1,0,0)$

(3) $(2,2,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,0) \iff \begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 2 = \alpha \\ 0 = \alpha \end{cases}$ impossibile

(4) $(2,1,1) = (1,1,1) + (1,0,0)$

Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio?

① $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ $\rightarrow$ riscalando $\lambda(x,y,z)$, se $xyz=0$ allora $(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z) = \lambda^3 xyz = 0$.

Non è sottospazio poichè $\underbrace{(1,0,0)+(0,1,1)}_{\text{appartengono al l'insieme}} = (1,1,1)$ ↪ non appartiene!

② $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

se $x+y+z=0$, guardando $\lambda(x,y,z)$: $\lambda x+\lambda y+\lambda z = \lambda(x+y+z) = \lambda \cdot 0 = 0$

Se (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) appartengono a questo insieme $\begin{matrix} x_1+y_1+z_1=0 \\ x_2+y_2+z_2=0 \end{matrix}$

Allora $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

e $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = \underbrace{(x_1+y_1+z_1)}_{=0} + \underbrace{(x_2+y_2+z_2)}_{=0} = 0$

Quindi è un sottospazio vettoriale!

③ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=-1\}$ Non è sottospazio poichè $2\cdot(x,y,-1) = (2x,2y,-2)$ che non appartiene a questo insieme

④ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = -z+1\} = W$

Non è sottospazio:

Esempio : $(1,1,-1)$ è un punto in W

$(1+1 = -(-1)+1)$

$(0,1,0)$ è un punto in W

$(0+1 = -0+1)$

Ma $(1,1,-1)+(0,1,0) = (1,2,-1)$

e $\underset{3}{\underset{\parallel}{1+2}} \neq \underset{2}{\underset{\parallel}{-(-1)+1}}$. Quindi W non è sottospazio!