Prof. Jorge Vitória
Università degli Studi di Padova, 2025/2026

Esercizi per il corso di MATEMATICA

Corsi di laurea in Chimica e Chimica Industriale

Foglio 5

26 febbraio 2026

1. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Si usi l'algoritmo di eliminazione di Gauss per determinare una forma ridotta di ognuna delle matrici elencate.
   (b) Si indichino le colonne dominanti di una forma ridotta di ogni matrice elencata.
   (c) Si trovino tutte le soluzioni del sistema di equazioni lineari di cui D è la matrice dei coefficienti con colonna di termi noti $(1,-1,3)$.
   (d) Si trovino tutte le soluzioni del sistema del equazioni lineari che ha B per matrice dei coefficienti e ha la colonna dei termi noti uguale a $(1,0,2,2)$,
   (e) Supponiamo che A e G sono le matrici complete di sistemi di equazioni lineari.
      i. Si scrivano i sistemi di equazioni associati ad A e a G.
      ii. Si trovino tutte le soluzioni di ognuno dei due sistemi usando le forme ridotte di A e di G trovate su.
   (f) Supponiamo che F e H sono le matrice di coefficienti di due sistemi di equazioni lineari omogenee (cioè sistemi in cui la colonna di termi noti è nulla).
      i. Si scrivano i sistemi di equazioni associati a F e a H.
      ii. Si trovino tutte le soluzioni di ognuno dei due sistemi usando le forme ridotte di F e H trovate su.

2. Si dimostri che l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con l'operazione di somma di numeri complessi e il prodotto per uno scalare reale definito tramite il prodotto usuale di un numero reale per un numero complesso, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

3. Si dimostri che l'insieme delle soluzioni un'equazione differenziale di primo ordine del tipo $y' + a(x)y = 0$, con la somma e riscalamento usuale nelle funzioni, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

4. Si dimostri che l'insieme $\mathbb{R}_0^+$ dei numeri reali non-negativi con l'usuale operazione di somma fra numeri reali e la funzione di prodotto per uno scalare definita da

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ (\lambda, x) & \mapsto & |\lambda| x \end{array}$$

   non é uno spazio vettoriali su $\mathbb{R}$.

5. Si decida se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$ (per $\mathbb{K}$ e n indicato in ogni caso) è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

   (a) L'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2 + x = 0$ in $\mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   (b) L'insieme delle soluzioni dell'equazione $y = -x + 2$ in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

   (c) L'insieme delle soluzioni dell'equazione $y = z - 2x$ in $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

   (d) L'insieme delle soluzioni dell'equazione $z - 3x - 2 = y$ in $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   (e) L'insieme delle soluzioni dell'equazione $xy = 0$ in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si dimostri che se per un dato scalare α in $\mathbb{K}$ e un dato vettore v in V si ha che $\alpha \cdot v = 0_V$, allora $\alpha = 0$ oppure $v = 0_V$.