25/02/2026

Spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$)

ingredienti: insieme non-vuoto V

operazione $+$ che prende due elementi di V e ne produce uno

operazione riscalamento $\cdot$ che prende un elemento di V e ne produce un'altro, usando uno scalare in $\mathbb{k}$

regole:

(1) $+$ è associativa

(2) $+$ è commutativa

(3) esiste elemento neutro 0_V per $+$

(4) per ogni v in V esiste elemento opposto v', cioè

$$v + v' = 0_V$$

(5) $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$

(6) $\cdot$ è distributiva rispetto alla somma di scalari in $\mathbb{k}$

(7) $\cdot$ è "associativa"

(8) Riscalamento per 1 non cambia l'elemento di V.

elementi di V $\rightsquigarrow$ detti "vettori"

elementi di $\mathbb{k}$ $\rightsquigarrow$ detti "scalari"

Esempio: $V =]0, +\infty[$ $\quad + =$ somma di numeri reali

$\cdot =$ riscalamento usuale per un numero reale.

Spazio vettoriale?

Ci sono due problemi:

⚠ il riscalamento non ha senso! Infatti, se riscalo un elemento di V per un numero negativo, il risultato non appartiene a V.

⚠ Ma anche la somma ha i suoi problemi: Nonostante sia associativa e commutativa, non esiste un elemento neutro in V per questa operazione! Il zero non appartiene a V!

Quindi, la risposta è NO! Però cerchiamo di rendere V uno spazio vettoriale con altre operazioni.

Definiamo $+_V$ una operazione che prende due elementi a e b in V e produce un'altro nel seguente modo:
$$a +_V b := \underbrace{ab}_{\text{prodotto di numeri reali!}}$$

Chiaramente gli assiomi (1) e (2) sono soddisfatti per questa operazione. Anche (3) è soddisfatto: il numero reale 1, appartenente a V, soddisfa
$$a +_V 1 = a1 = a \quad \forall a \in V.$$

(4) $a +_V \frac{1}{a} = a\frac{1}{a} = 1$, quindi $\frac{1}{a}$ è l'opposto di a in V.

Definiamo adesso una operazione di riscalamento prendendo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a \in V$ e definendo
$$\lambda \cdot_V a = a^\lambda \quad \left(\text{nota: } a^\lambda \in V \text{ poichè } a^\lambda > 0 \text{ se } a > 0\right)$$

Verifichiamo gli assiomi rimanenti:

(5) $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$

$$\underbrace{\lambda \cdot_V (a +_V b)}_{\substack{= \lambda \cdot_V (ab) \\ = (ab)^\lambda}} = \underbrace{\lambda \cdot_V a +_V \lambda \cdot_V b}_{\substack{= a^\lambda +_V b^\lambda \\ = a^\lambda b^\lambda}}$$

e questi sono uguali per le proprietà delle potenze.

somma di scalari

(6) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a \in V$

$$\underbrace{(\lambda + \mu) \cdot_V a}_{= a^{\lambda + \mu}} = \underbrace{\lambda \cdot_V a +_V \mu \cdot_V a}_{\substack{= a^\lambda +_V a^\mu \\ = a^\lambda a^\mu}}$$

e questi sono uguali per le proprietà delle potenze

prodotto di scalari

(7) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a \in V$

$$\underbrace{\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V a)}_{\substack{= \lambda \cdot_V (a^\mu) \\ = (a^\mu)^\lambda}} = \underbrace{(\lambda\mu) \cdot_V a}_{= a^{\lambda\mu}}$$

e questi sono uguali per le proprietà delle potenze.

(8) $1 \cdot_V a = a^1 = a \quad \forall a \in V$

<u>Conclusione</u>: $(V, +_V, \cdot_V)$ è uno spazio vettoriale!

Lemma 1.5 Sia V uno spazio vettoriale su $\Bbbk$, $\Bbbk = \mathbb{R}$ o $\Bbbk = \mathbb{C}$. Allora si ha per ogni $v \in V$:

$$(1) \quad 0 \cdot v = 0_V$$

vettore nullo

scalare 0

Dimostrazione

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v \overset{(7)}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

Per l'assioma (4), esiste v' tale che

$$v' + 0 \cdot v = 0_V$$

Aggiungendo v' ai due lati dell'uguaglianza, otteniamo

$$\underbrace{v' + 0 \cdot v}_{0_V} = v' + (0 \cdot v + 0 \cdot v)$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad 0_V = \underbrace{(v' + 0 \cdot v)} + 0 \cdot v$$

$$0_V = \underbrace{0_V + 0 \cdot v}$$

$$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \quad 0_V = 0 \cdot v \quad \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \blacksquare$$