24/02/2026

Esempi ① Se U è una matrice ridotta 5×5 di rango 4 e c è un vettore per cui la matrice $(U|c)$ ha rango 5, allora il sistema associato ha...

... 0 soluzioni, poichè $rk(U|c) \neq rk\, U$, e questo vuole dire che c è dominante in $(U|c)$ e allora c'è un'equazione associata del tipo

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1,$$

che chiaramente non ha soluzioni!

② Sia U una matrice 3×4 di rango 2. Se c è un vettore colonna per cui $(U|c)$ ha rango 2, quante soluzioni ha il sistema associato?

∞ soluzioni con due variabili libere, poichè $rk(U|c) = rk(U)$ (confermando l'esistenza di soluzioni) e il numero di variabili libere è

$$4 - 2 = 2$$

$\downarrow$ n° colonne di U. — 2 $\rightarrow$ rango.

Esempio
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$$

matrice completa:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{\mathcal{U}} \quad \underbrace{}_{c}$$

Per il teorema di Rouché - Cappelli, siccome

$$rk(\mathcal{U}) = rk(\mathcal{U}|c) = 3$$

allora il sistema ha soluzioni. Inoltre, siccome x_4 è variabile libera (poichè la 4^a colonna non ha un pivot, cioè non è dominante), il sistema ha infinite soluzioni.

Proseguiamo con eliminazione da giù in su.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + \frac{3}{2}R_3 \\ R_1 \to R_1 + R_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 29/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 29/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

riportando in sistema, abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = -9/2 \\ x_2 - x_4 = 29/2 \\ x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Associo ad x_4 un parametro t (poichè x_4 è libera) e ottengo che le mie soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} \\ x_2 = \frac{29}{2} + t \\ x_3 = 7 + 2t \end{cases}$$

Quindi le mie soluzioni sono $\left(-\frac{9}{2}, \frac{29}{2} + t, 7+2t, t\right)$

Spazi Vettoriali

Consideriamo le seguenti domande:

D1 Dati due elementi di un dato insieme, come produrre un terzo elemento?

D2 Dato un'elemento di un dato insieme, come produrre un'altro elemento?

D3 Come guarantire che l'insieme non è vuoto?

e rispondiamo alle domande per i seguenti insiemi:

	D1	D2	D3
$\mathbb{R}^n$	$+$	riscalare	$(0,0,\dots,0)$
$\mathbb{C}^n$	$+$	riscalare	$(0,0,\dots,0)$
soluzioni di $y'+a(x)y=0$	$+$	riscalare	$y(x)=0$
soluzioni di $ay''+by'+cy=0$	$+$	riscalare	$y(x)=0$
soluzioni di $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$	$+$	riscalare	$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_n=0 \end{cases}$
polinomi di grado ≤ 2	$+$	riscalare	0

Osservazione/Richiamo:

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due soluzioni di $y'+a(x)y=0$ allora $f(x)+g(x)$ è anche una soluzione?

$$
\begin{aligned}
&\left(f(x)+g(x)\right)' + a(x)\left(f(x)+g(x)\right) \\
&= f'(x)+g'(x) + a(x)f(x) + a(x)g(x) \\
&= \underbrace{\left(f'(x)+a(x)f(x)\right)}_{\substack{=0 \\ \text{poiché } f(x) \text{ è} \\ \text{soluzione}}} + \underbrace{\left(g'(x)+a(x)g(x)\right)}_{\substack{=0 \\ \text{poiché } g(x) \text{ è} \\ \text{soluzione}}} = 0
\end{aligned}
$$

Se $f(x)$ è soluzione e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x)$ è soluzione?

$$
\begin{aligned}
&\left(\lambda f(x)\right)' + a(x)\left(\lambda f(x)\right) \\
&= \lambda f'(x) + \lambda a(x) f(x) \\
&= \lambda \underbrace{\left(f'(x)+a(x)f(x)\right)}_{=0 \text{ poiché } f(x) \text{ è soluzione}} = 0
\end{aligned}
$$

Attenzione: Questi ragionamenti valgono per le equazioni indicate poiché sono omogenee; altrimenti non si otterrebbe che la somma o riscalamento di soluzioni è ancora soluzione!

Definizione 1.4 Sia $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ è un insieme V non-vuoto dotato di:

- un'operazione "$+$" che prende due elementi di V e restituisce un'altro elemento di V, soddisfacendo le seguenti proprietà:

(1) Associatività : per ogni elementi v_1, v_2 e v_3 in V abbiamo $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

(2) commutatività : per ogni elementi v_1 e v_2 in V abbiamo $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

(3) Esistenza di un elemento neutro, cioè esiste un elemento e in V tale che per ogni v in V, $e + v = v$. Di solito, un tale elemento viene scritto 0_V, e si dice elemento zero o nullo.

(4) Esistenza di un elemento opposto per ogni elemento : per ogni v in V esiste un elemento v' tale che $v + v' = 0_V$

- un'operazione "riscalamento" che prende uno scalare λ in $\mathbb{K}$ e un elemento v in V e restituisce un elemento di v che scriviamo λv, e che soddisfa le seguenti proprietà:

(5) Distributività del riscalamento rispetto a $+$ cioè, per ogni λ in $\mathbb{K}$ e per ogni v_1 e v_2 in V si ha

$$\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

(6) Distributività del riscalamento rispetto alla somma di scalari: cioè, per ogni λ_1 e λ_2 in $\mathbb{k}$ e per ogni v in V, si ha:

$$\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\text{somma di numeri in } \mathbb{k}} v = \lambda_1 v \underbrace{+}_{\text{operazione in } V.} \lambda_2 v$$

Attenzione: somma di numeri in $\mathbb{k}$; operazione in V.

(7) Associatività del riscalamento cioè, per ogni λ_1, λ_2 in $\mathbb{k}$ e v in V

$$\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) v$$

Attenzione: 2 riscalamenti | prodotto in $\mathbb{k}$ | riscalamento

(8) Elemento neutro per il riscalamento, cioè per ogni elemento v di V, si ha

$$1 v = v$$

in $\mathbb{k}$

Gli elementi di V sono detti vettori.

Esercizio: Verificare che gli insiemi nella tabella, con le operazioni di somma e riscalamento già conosciute sono infatti spazi vettoriali!