23/02/2026

Secondo Semestre

(Bentornati! Continueremo con Algebra lineare!)

Ricordiamo:

Sistema di m equazioni lineari ad n incognite $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

matrice completa del sistema di equazioni

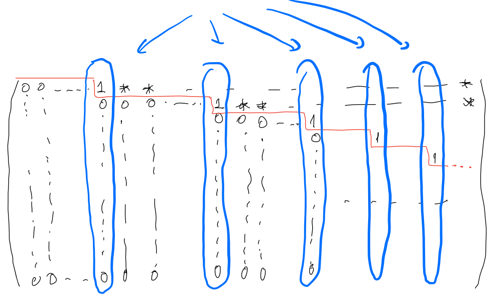
$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrice dei coefficienti — termini noti

Eliminazione Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & & & \\ c_{\ell 1} & c_{\ell 2} & \dots & c_{\ell k} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ELEMENTARI}]{\text{OPERAZIONI}}$$

Colonne dominanti!



FORMA RIDOTTA

OPERAZIONI ELEMENTARI

1. $R_i \longleftrightarrow R_j$
2. $R_i \longrightarrow \alpha R_i \quad (\alpha \neq 0)$
3. $R_i \longrightarrow R_i + \alpha R_j$

Definizione 1.3: Se U è una matrice in forma ridotta, il numero di colonne dominanti è detto il rango di U, e si scrive $\operatorname{rk} U$.

Esempio Quando si brucia propano si produce

$$x_1\, C_3H_8 + x_2\, O_2 \longrightarrow x_3\, CO_2 + x_4\, H_2O$$

$$\begin{array}{ll} \text{Carbonio}: & \\ \text{idrogeno}: & \\ \text{ossigeno}: & \end{array} \begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ 8x_1 = 2x_4 \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{completa}]{\text{matrice}} (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Applichiamo eliminazione Gaussiana

$$(A|b) \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 8R_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{3}{8} R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right)$$

Come colonna si può anche dire "libera", però non corrisponde ad una variabile.

Colonne dominanti

$\downarrow$

x_1, x_2, x_3 variabili dominanti

Colonna libera

$\downarrow$

x_4 variabile libera

Riscrivendo in sistema questa matrice completa otteniamo un sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 - 1/3\, x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - \frac{1}{2} x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{3}{4} x_4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} x_3 \\ x_2 = x_3 + \frac{1}{2} x_4 \\ x_3 = \frac{3}{4} x_4 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} x_4 \\ x_2 = \frac{3}{4} x_4 + \frac{1}{2} x_4 = \frac{5}{4} x_4 \\ x_3 = \frac{3}{4} x_4 \end{cases}$$

Variabili dominanti

dipendono dal valore da

Variabile libera.

Soluzione generale del sistema: Scegliendo un valore t per la variabile libera ($x_4 = t$), allora si ottiene una soluzione

$$\left(\frac{1}{4}t, \frac{5}{4}t, \frac{3}{4}t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Tornando al problema reale, posso scegliere $t=4$ ottenendo $(1, 5, 3, 4)$ come soluzione, cioè

$$C_3H_8 + 5\,O_2 \longrightarrow 3\,CO_2 + 4\,H_2O$$

Ancora su questo esempio: possiamo "semplificare" ancora di più la matrice ridotta?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_1 \to R_1 + \frac{1}{3} R_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right)$$

Infatti si può fare eliminazione Gaussiana da giù in su, cioè eliminando le entrate sopra i pivot usando operazioni elementari!

Risoluzione di un sistema lineare

Dato un sistema lineare a m equazioni e n incognite produciamo la sua matrice completa $(A|b)$, che sarà una matrice $m \times (n+1)$, dove A è la matrice dei coefficienti e b è la colonna dei termini noti.

1. Procediamo con eliminazione Gaussiana per ottenere una forma ridotta di $(A|b)$, individuando le colonne dominanti (variabili dominanti) e le colonne libere (variabili libere)

Attenzione: Seguendo una sequenza di operazioni elementari diversa da un'altra, magari si arriva a forme ridotte diverse. Vedremo però che le colonne dominanti rimarrano sempre le stesse.

Chiamiamo a questa forma ridotta $(U|c)$

2. Ci sono 3 casi da considerare:

Caso I. La colonna c è dominante.

Questo vuole dire che la forma ridotta è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & * & & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Questa ultima riga corrisponde ad un'equazione $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$, che chiaramente non ha soluzioni. Quindi siccome il sistema iniziale è equivalente al sistema associato alla forma ridotta, abbiamo che anche il sistema iniziale è impossibile, cioè, non ha soluzioni.

Caso II   La colonna c non è dominante.

Caso II.1   Non ci sono variabili libere.
(Cioè, tutte le colonne di U sono dominanti)

In questo caso la matrice $(U|c)$ è della forma

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & * & & & * \\ & 1 & & & & & * \\ & & 1 & & & & * \\ & 0 & & 1 & & & * \\ & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Allora ogni variabile ha un valore determinato per soluzione. Infatti con eliminazione Gaussiana da giù in su, troviamo un sistema equivalente di cui la matrice completa è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & * \\ & 1 & & & * \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = * \\ x_2 = * \\ x_3 = * \\ \vdots \end{cases}$$

<u>Conclusione</u>: in questo caso la soluzione del sistema è unica.

<u>Caso II.2</u> Non tutte le colonne di U sono dominanti

In tale caso, abbiamo

$$(U|c) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & & & * & * & * & * & * \\ & 1 & & & * & * & \vdots & * \\ 0 & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & * \\ & & & 1 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{colonne dominanti}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{colonne libere}}$$

Allora le soluzioni del sistema saranno ottenute scrivendo ogni variabile dominante come dipendente dalle variabili libere. Allora il sistema avrà infinite soluzioni, dato che posso scegliere qualunque valore per le variabili libere.

<u>Conclusione</u>: Un sistema di equazioni lineari ha 0 soluzioni, 1 soluzione o ∞ soluzioni.

Teorema di Rouché-Capelli (versione 1)

Sia $(A|b)$ la matrice completa associata ad un sistema di m equazioni lineari ad n incognite e supponiamo che $(U|c)$ è una sua forma ridotta. Allora si ha che:

(1) $rk(U) \neq rk(U|c)$ allora c è dominante e quindi il sistema non ha soluzioni.

(2) $rk(U) = rk(U|c)$ (cioè c non è dominante) allora il sistema ha soluzioni, e:

(2.1) $rk(U) = n$, allora esiste un'unica soluzione

(2.2) $rk(U) < n$, allora ci sono ∞ soluzioni.