

14 La conduzione termica in regime variabile

$$\theta_n = A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n X)$$

$$A_n = \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}$$

$$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$$

Per $\text{Bi} = 5$, $X = 1$, and $t = 0.2$:

n	λ_n	A_n	θ_n
1	1.3138	1.2402	0.22321
2	4.0336	-0.3442	0.00835
3	6.9096	0.1588	0.00001
4	9.8928	-0.876	0.00000

FIGURA 14.14

Il termine generale della soluzione in serie del problema di conduzione termica in regime variabile decresce rapidamente con n e quindi λ_n aumenta in conseguenza della diminuzione della funzione esponenziale di esponente $-\lambda_n^2 \tau$.

Tutto ciò completa l'analisi della soluzione del problema della conduzione del calore monodimensionale in regime variabile per parete piana. Le soluzioni per altre geometrie quali cilindro lungo o sfera possono essere ricavate utilizzando lo stesso approccio.

I risultati per tutte e tre le geometrie sono riportati nella **Tabella 14.1**. La precedente soluzione è applicabile anche a una parete piana di spessore L avente la superficie in corrispondenza di $x = 0$ isolata e la superficie destra a $x = L$ soggetta a convezione, in quanto è esattamente il problema che è appena stato risolto.

La soluzione analitica dei problemi di conduzione in regime variabile implica spesso delle serie infinite e quindi la valutazione di un numero infinito di termini per determinare la temperatura in una precisa posizione e a un preciso istante di tempo. Ciò può sembrare complicato sulle prime, ma non c'è bisogno di preoccuparsi: come mostrato nella **Figura 14.14**, i termini della sommatoria decrescono rapidamente al crescere di n e quindi λ_n aumenta in virtù della diminuzione esponenziale di $e^{-\lambda_n^2 \tau}$. È proprio questo il caso in cui il tempo adimensionale τ è grande, per cui, la valutazione dei primi termini della serie (in questo caso solo il primo) è normalmente adeguata a determinare la temperatura adimensionale θ .

TABELLA 14.1

Riassunto delle soluzioni per il problema di conduzione del calore monodimensionale in regime variabile attraverso una piastra piana di spessore $2L$, un cilindro di raggio r_o e una sfera di raggio r_o esposti a convezione su tutte le superfici.*

Geometria	Soluzione	Radici λ_n di
Piastra piana	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x/L)$	$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$
Cilindro	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\lambda_n)}{\lambda_n J_0(\lambda_n) + J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r/r_o)$	$\lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = \text{Bi}$
Sfera	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 (\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_n x/L)}{\lambda_n x/L}$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \text{Bi}$

*In questo caso $\theta = (T - T_i)/(T_o - T_i)$ è la temperatura adimensionale, $\text{Bi} = hL/\lambda$ è il numero di Biot, $\text{Fo} = \tau = \alpha t/L^2$ o $\alpha \tau / r_o^2$ è il numero di Fourier e J_0 e J_1 sono le funzioni di Bessel del prim'ordine, i cui valori sono riportati in Tab. 11-2.

14.2.3 La soluzione analitica approssimata e grafica

La soluzione analitica ottenuta nel precedente paragrafo per la conduzione monodimensionale in regime variabile in una parete piana coinvolge serie di infiniti termini ed equazioni implicite che sono difficili da risolvere. Risulta perciò conveniente semplificare le soluzioni analitiche e presentarle in forma *tabellare* o *grafica* attraverso semplici relazioni.

Le quantità adimensionali definite precedentemente per la parete piana possono essere utilizzate anche per un *cilindro* o una *sfera*, sostituendo la variabile spaziale x con r e il semispessore L con il raggio esterno r_o . Si noti che, mentre nell'analisi a parametri concentrati si è utilizzato il rapporto V/A , la lunghezza caratteristica adottata nella definizione del numero di Biot è il semispessore L per la parete piana e il raggio esterno r_o per il cilindro lungo e la sfera.

Si è accennato prima al fatto che i termini nelle soluzioni delle serie nella **Tabella 14.1** convergono rapidamente al crescere del tempo e, per $\tau > 0.2$, prendendo solo il primo termine della serie e trascurando i rimanenti, si commette un errore inferiore al 2 per cento. Dal momento che si è solitamente

interessati a soluzioni per $\tau > 0.2$, risulta perciò molto conveniente la soluzione **approssimata al primo termine**, data da:

$$\text{Parete piana: } \theta_{\text{parete}} = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 r / r_0), \quad \tau > 0.2 \quad (14.23)$$

$$\text{Cilindro: } \theta_{\text{cilindro}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r / r_0), \quad \tau > 0.2 \quad (14.24)$$

$$\text{Sfera: } \theta_{\text{sfera}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\text{sen}(\lambda_1 r / r_0)}{(\lambda_1 r / r_0)}, \quad \tau > 0.2 \quad (14.25)$$

Le costanti A_1 e λ_1 sono funzioni solo del numero di Biot e i loro valori, proprio in funzione del numero di Biot, sono riportati nella **Tabella 14.2** per tutte e tre le geometrie. La funzione J_0 è la funzione di Bessel del primo tipo di ordine zero, i cui valori possono essere determinati facendo uso della **Tabella 14.3**. Osservando che $\cos(0) = J_0(0) = 1$ e che il limite di $(\text{sen } x)/x$ per x che tende a zero è anch'esso 1, le precedenti relazioni si semplificano, al centro della parete piana, del cilindro e della sfera, nelle seguenti:

$$\text{Centro della parete piana: } \theta_{0, \text{parete}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (14.26)$$

$$\text{Centro del cilindro: } \theta_{0, \text{cilindro}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (14.27)$$

$$\text{Centro della sfera: } \theta_{0, \text{sfera}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (14.28)$$

Confrontando i due gruppi di relazioni precedenti, si nota che le temperature adimensionali in qualsiasi posizione della parete piana, del cilindro o della sfera sono legate alla temperatura al centro della figura da:

$$\frac{\theta_{\text{parete}}}{\theta_{0, \text{parete}}} = \cos\left(\frac{\lambda_1 x}{L}\right), \quad \frac{\theta_{\text{cilindro}}}{\theta_{0, \text{cilindro}}} = J_0\left(\frac{\lambda_1 r}{r_0}\right), \quad \text{e} \quad \frac{\theta_{\text{sfera}}}{\theta_{0, \text{sfera}}} = \frac{\text{sen}(\lambda_1 r / r_0)}{\lambda_1 r / r_0} \quad (14.29)$$

che mostra come la dipendenza della temperatura adimensionale dal tempo sia sempre la stessa all'interno di una data geometria. Ciò significa che se a un certo istante la temperatura adimensionale θ_0 varia del 20 per cento, la stessa cosa avviene per la temperatura adimensionale θ_0 in qualsiasi altro punto del mezzo al medesimo istante.

Una volta noto il numero di Biot, le relazioni precedenti possono essere utilizzate per la determinazione della temperatura in un punto qualsiasi del corpo. Poiché la determinazione delle costanti A_1 e λ_1 richiede di solito una interpolazione, si possono usare soluzioni approssimate al primo termine presentate in forma grafica. La difficoltà e a volte gli errori di lettura dei diagrammi suggeriscono però di preferire l'uso delle precedenti relazioni ai diagrammi. I diagrammi della temperatura variabile delle **Figure 14.15**, **14.16** e **14.17** per un'ampia parete piana, un lungo cilindro e una sfera, presentati nel 1947 da M.P. Heisler e detti diagrammi

16 La conduzione termica in regime variabile

TABELLA 14.2

Le funzioni di Bessel del primo tipo di ordine zero e del primo ordine

λ	$J_0(\lambda)$	$J_1(\lambda)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202

TABELLA 14.3

Coefficienti usati nella soluzione approssimata al primo termine della conduzione termica monodimensionale in regime variabile in pareti piane, cilindri e sfere ($Bi = hL/\lambda$ per una parete piana di spessore $2L$ e $Bi = hr_0/\lambda$ per un cilindro o una sfera di raggio r_0)

Bi	Strato piano		Cilindro		Sfera	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

di Heisler, sono stati integrati nel 1961 dai diagrammi di trasmissione del calore in regime variabile di H. Gröber. A ciascuna geometria sono associati tre diagrammi: il primo per calcolare la temperatura T_0 al centro della geometria in un dato istante t , il secondo per calcolare la temperatura in altri punti nello stesso istante in funzione di T_0 e infine il terzo per calcolare la quantità complessiva di calore trasmesso fino al tempo t . Questi diagrammi sono validi per $\tau > 0.2$.

Si osservi che il caso $1/Bi = \lambda/hL = 0$ corrisponde a $h \rightarrow \infty$, vale a dire al caso di una temperatura superficiale T_∞ . Infatti portare le superfici del corpo improvvisamente alla temperatura T_∞ per $t = 0$ e mantenerle a T_∞ per tutto il tempo equivale a ipotizzare un valore di h tendente a infinito (**Figura 14.18**).

La temperatura del corpo varia dalla temperatura iniziale T_i alla temperatura dell'ambiente T_∞ che viene raggiunta alla fine del processo di conduzione di calore in regime variabile. Pertanto, la massima quantità di calore che un corpo può

guadagnare (o perdere se $T_i > T_\infty$) è semplicemente la variazione nel contenuto energetico del corpo:

$$Q_{\max} = mc_p(T_\infty - T_i) = \rho V c_p(T_\infty - T_i) \quad (\text{kJ}) \quad (14.30)$$

dove m è la massa, V il volume, ρ la densità e c_p il calore specifico del corpo. $Q_{\max}$ rappresenta la quantità di calore trasmesso in un tempo infinito per $t \rightarrow \infty$, mentre la quantità di calore trasmesso Q in un tempo finito t sarà ovviamente inferiore. $Q_{\max}$ rappresenta quindi la quantità di calore trasmesso per $t \rightarrow \infty$. La quantità di calore Q trasmesso a un certo istante t è ovviamente inferiore a tale massimo e può essere espressa attraverso la somma delle variazioni dell'energia interna nell'intera geometria:

$$Q = \int_V \rho c_p [T(x, t) - T_i] dV \quad (14.31)$$

dove $T(x, t)$ è la distribuzione di temperatura nel mezzo all'istante t . Assumendo che le proprietà siano costanti, il rapporto $Q/Q_{\max}$ diviene:

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\int_V \rho c_p [T(x, t) - T_i] dV}{\rho c_p (T_\infty - T_i)} = \frac{1}{V} \int_V (1 - \theta) dV \quad (14.32)$$

Sfruttando le opportune relazioni per le temperature adimensionali basate sulla soluzione approssimata al primo termine per la parete piana, il cilindro e la sfera ed eseguendo le integrazioni, si ottengono le seguenti relazioni per la frazione di calore trasmesso in tali geometrie:

$$\text{Parete piana:} \quad \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{parete}} = 1 - \theta_{0, \text{parete}} \frac{\text{sen} \lambda_1}{\lambda_1} \quad (14.33)$$

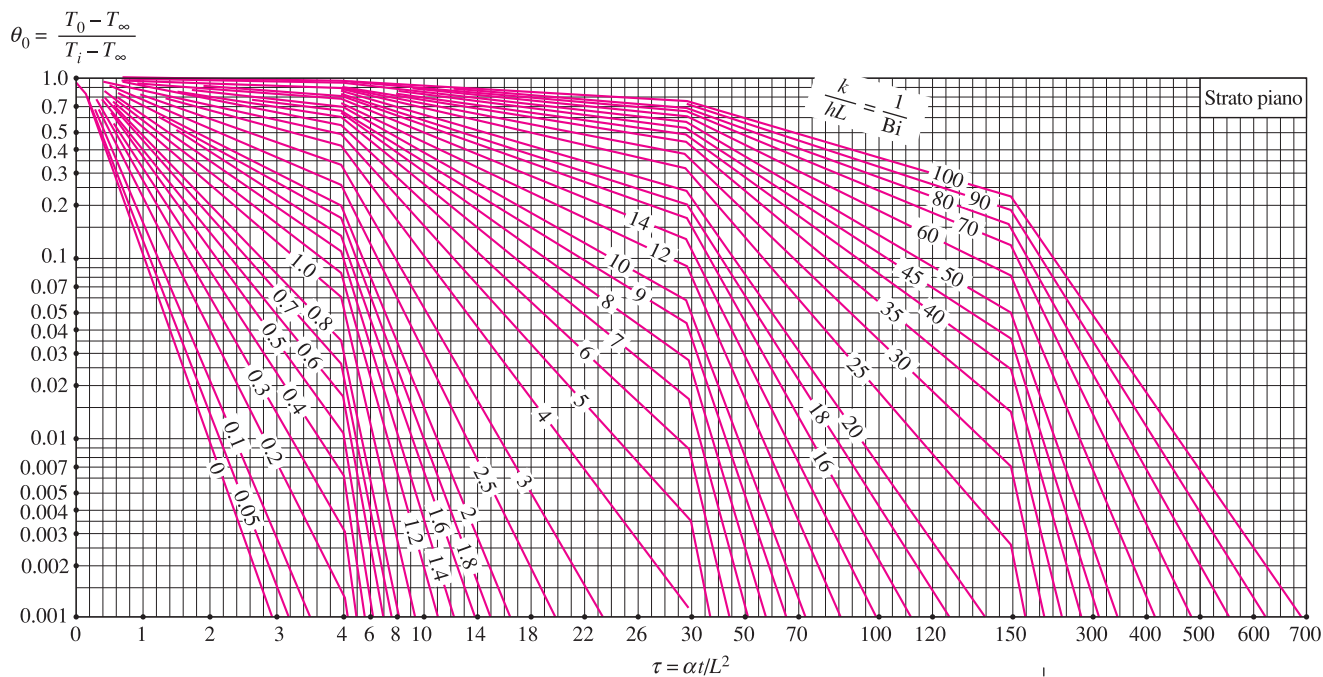
$$\text{Cilindro:} \quad \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{cilindro}} = 1 - 2\theta_{0, \text{cilindro}} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \quad (14.34)$$

$$\text{Sfera:} \quad \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{sfera}} = 1 - 3\theta_{0, \text{sfera}} \frac{\text{sen} \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1^3} \quad (14.35)$$

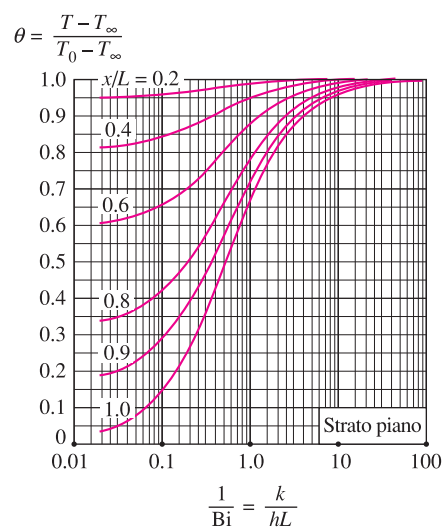
Questi rapporti $Q/Q_{\max}$ basati sulla soluzione approssimata al primo termine sono anche tracciati nella **Figura 14.15c**, **14.16c** e **14.17c** in funzione delle variabili Bi e $h^2 \alpha t / \lambda^2$ per la parete piana ampia, il cilindro lungo e la sfera, rispettivamente. Si noti che poiché la *frazione* di calore trasmesso $Q/Q_{\max}$ è stata determinata attraverso tali diagrammi o equazioni per un certo istante t , la quantità di calore effettivamente trasmessa a quel dato istante può essere calcolata semplicemente moltiplicando tale frazione per $Q_{\max}$. Un segno negativo per $Q_{\max}$ significa che il corpo sta cedendo calore (**Figura 14.19**).

I diagrammi di Heisler/Gröber e le soluzioni al primo termine, appena presentate, si riferiscono alle condizioni indicate all'inizio di questo paragrafo: corpo inizialmente a temperatura uniforme, privo di generazione di energia e

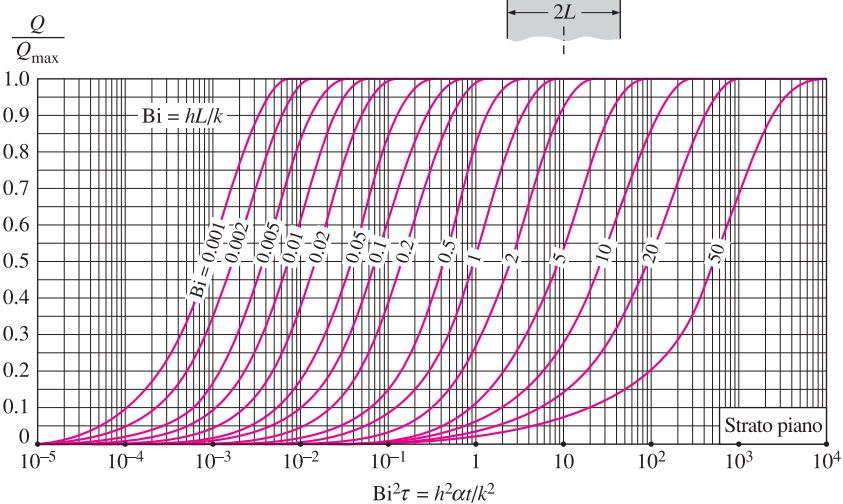
18 La conduzione termica in regime variabile



(a) Temperatura nel piano medio



(b) Distribuzione di temperatura



(c) Rapporto di scambio termico

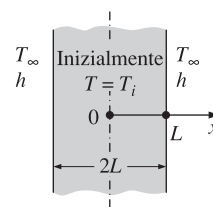
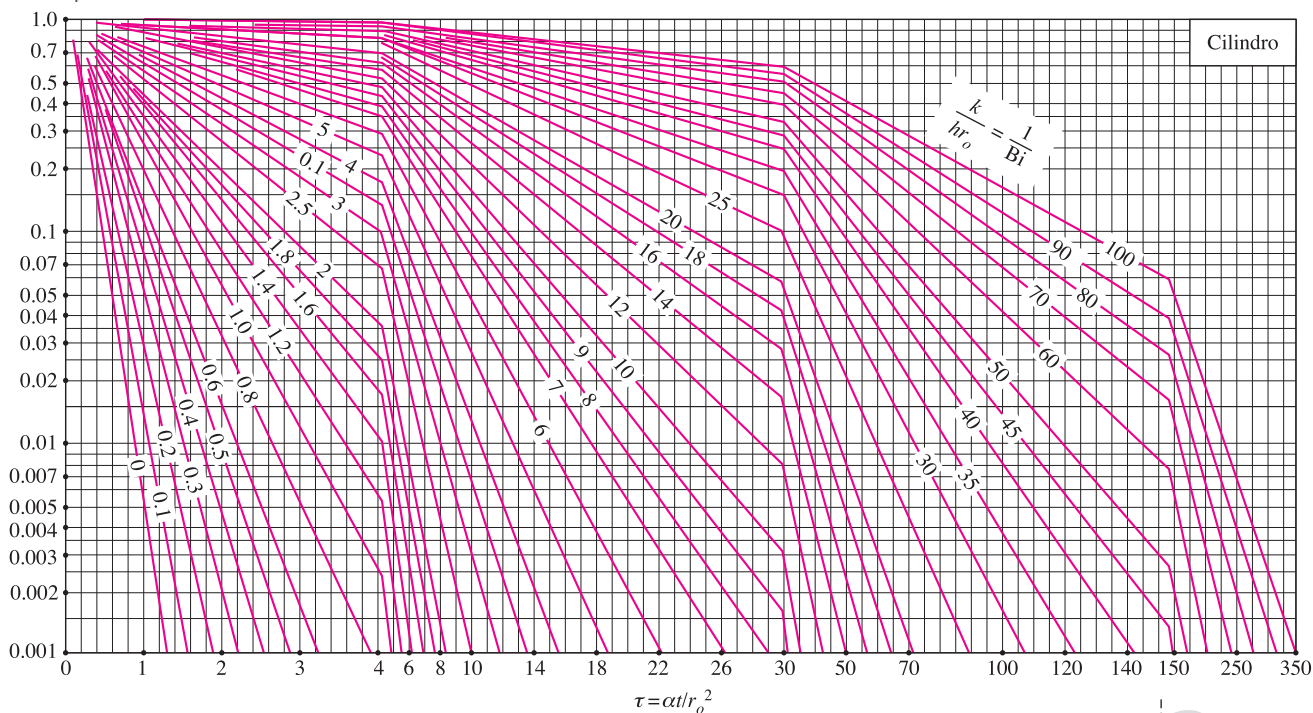


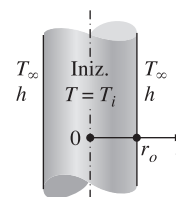
FIGURA 14.15

Temperatura variabile e diagrammi di scambio termico per una parete piana di spessore $2L$ inizialmente a una temperatura uniforme T_i soggetta a convezione da entrambi i lati verso un ambiente a temperatura T_∞ e con un coefficiente convettivo h .

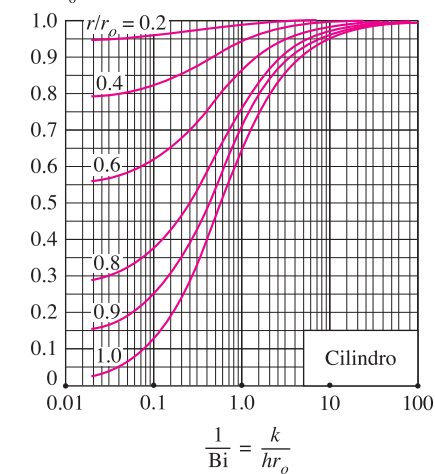
$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



(a) Temperatura nel piano medio

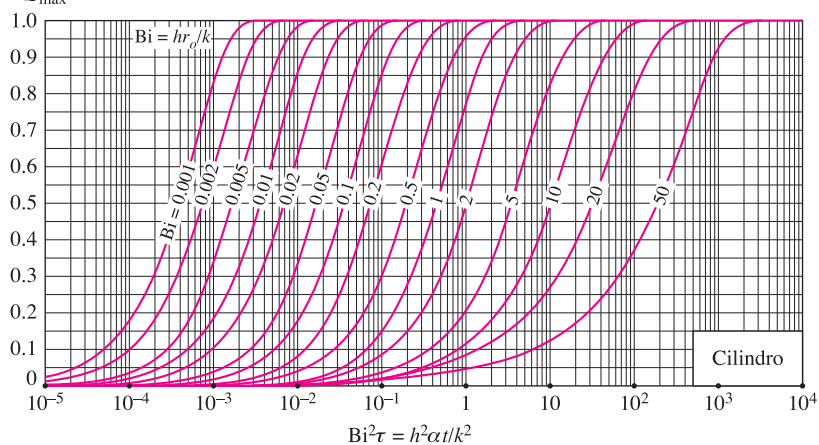


$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$



(b) Distribuzione di temperatura

$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$



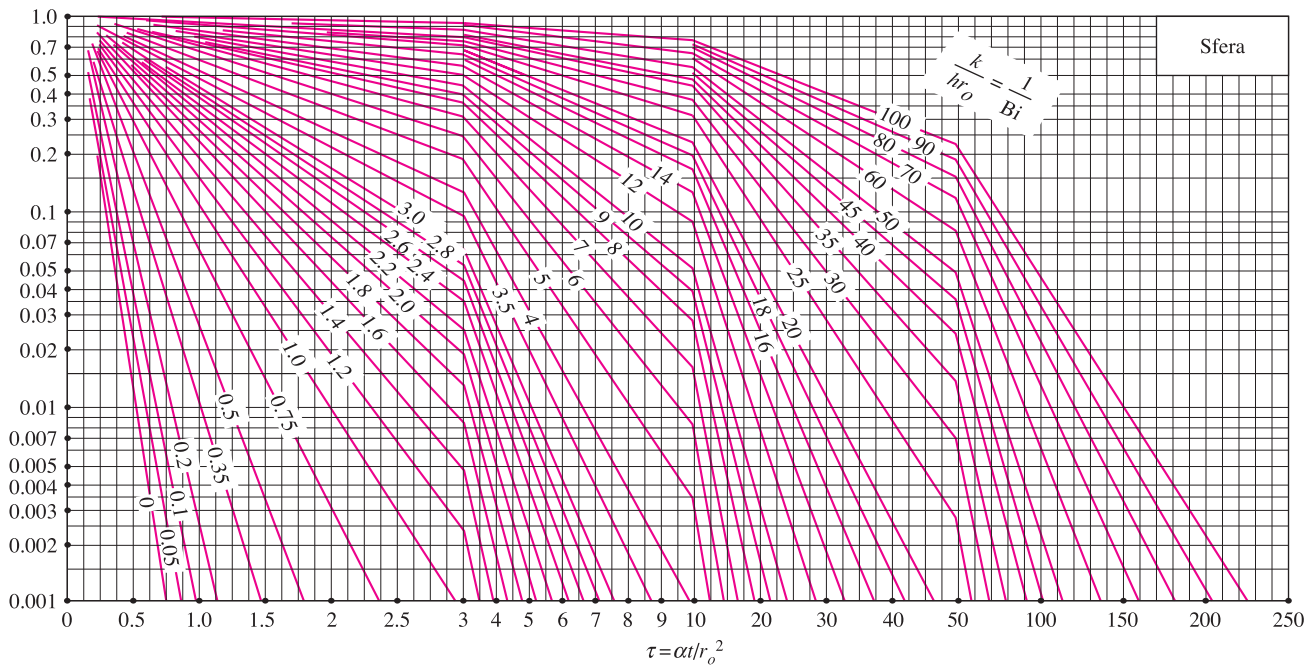
(c) Rapporto di scambio termico

FIGURA 14.16

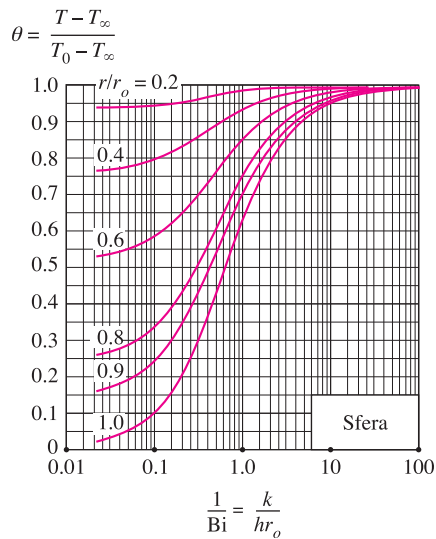
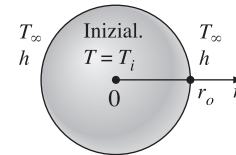
Temperatura variabile e diagrammi di scambio termico per un lungo cilindro di raggio r_o inizialmente a una temperatura uniforme T_i soggetto a convezione da entrambi i lati verso un ambiente a temperatura T_∞ e con un coefficiente convettivo h .

20 La conduzione termica in regime variabile

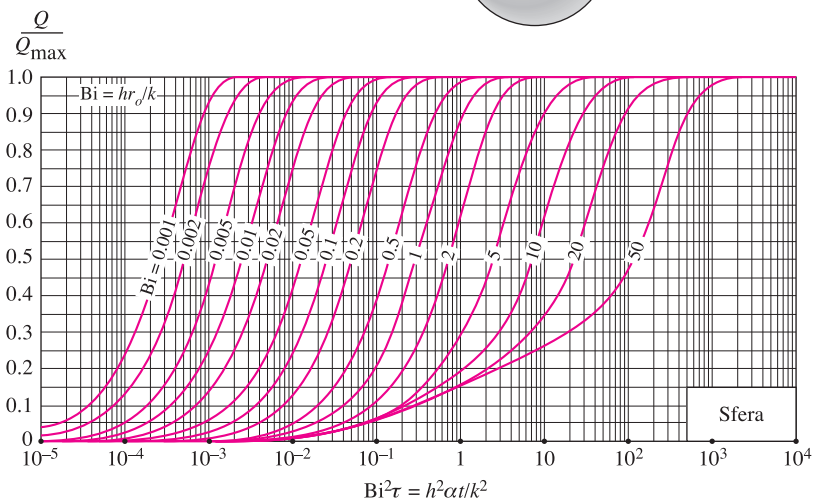
$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



(a) Temperatura nel punto centrale



(b) Distribuzione di temperatura



(c) Rapporto di scambio termico

FIGURA 14.17

Temperatura variabile e diagrammi di scambio termico per una sfera di raggio r_o inizialmente a una temperatura uniforme T_i soggetta a convezione da entrambi i lati verso un ambiente a temperatura T_∞ e con un coefficiente convettivo h .