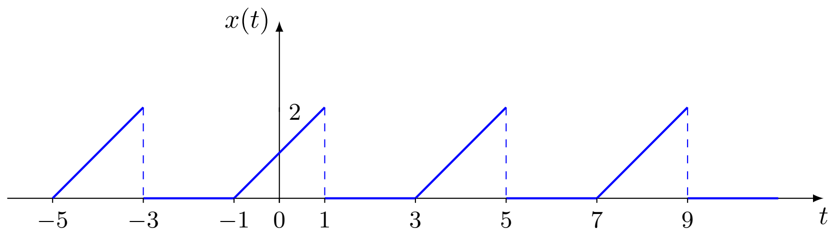
SEGNALI E SISTEMI
Seconda prova di autovalutazione 2026
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2025-2026)
11 maggio 2026
SOLUZIONI

Esercizio 1 Serie di Fourier a tempo continuo e filtraggio [punti 7]

Dato il segnale a tempo continuo $x(t)$ rappresentato in figura

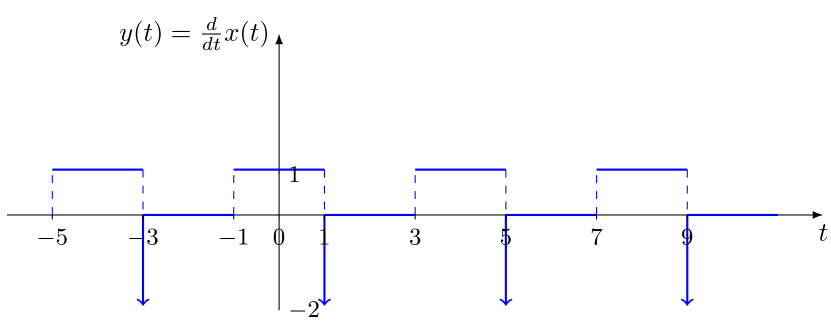


si chiede di:

1. Determinare i coefficienti di Fourier a_k. [3 punti]
2. Determinare i coefficienti di Fourier del segnale $z(t) = x(t) - 2$. [1 punto]
3. Determinare i coefficienti di Fourier del segnale $w(t) = x(t) \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}t}$. [1 punto]
4. Il segnale $x(t)$ è l'ingresso di un filtro LTI passa basso ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{2\pi}{3}$. Trovare l'uscita $s(t)$. [2 punti]

Soluzione.

1. $x(t)$ ha periodo fondamentale $T = 4$ e pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. La derivata del segnale $x(t)$ è $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, mostrata in figura



ossia

$$y(t) = \mathrm{rep}_4\Big(\mathrm{rect}(fract2) - 2\delta(t-1)\Big)$$

i cui coefficienti di Fourier b_k sono

$$b_k = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{k}{2}) - \tfrac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

Per la regola di integrazione si ha, per $k \neq 0$

$$a_k = \frac{b_k}{jk\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{jk\pi}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{k}{2}) - \frac{1}{jk\pi}e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

mentre a_0 è la media del segnale

$$a_0 = \tfrac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)dt = \tfrac{1}{2}$$

Si può verificare facilmente che a_k ha simmetria hermitiana, com'è giusto sia essendo $x(t)$ reale.

2. Lo shift verso il basso di 2 modifica solo il coefficiente di Fourier di ordine 0. Per cui

$$c_k = \begin{cases} a_0 - 2 = -\frac{3}{2} & , k = 0 \\ a_k & , \text{altrove} \end{cases}$$

3. Per la proprietà di traslazione in frequenza, $d_k = a_{k-3}$.

4. Il filtro lascia passare inalterate solo le armoniche alle pulsazioni $k\omega_0$ con $|k\omega_0| \leq \frac{2\pi}{3}$. Essendo $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, passano inalterate le armoniche corrispondenti a $|k| \leq \frac{4}{3}$ ovvero $|k| \leq 1$ (essendo k intero). Tutte le altre arnmoniche vengono cancellate. L'uscita del filtro è quindi

$$s(t) = a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + a_0 + a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t}$$

Esercizio 2 – Serie di Fourier a tempo discreto [punti 3]

Trovare il segnale $x(n)$, reale, pari, periodico di periodo $N_0 = 3$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\sum_{n=-1}^{1} x(n) = 3$
2. $P_x = 19$

Soluzione.

Avendo $x(n)$ periodo $N_0 = 3$, ci sono 3 coefficienti distinti (a_{-1}, a_0, a_1). Il segnale è reale e pari, perciò anche i suoi coefficienti di Fourier saranno reali e pari, per cui $a_{-1} = a_1$. Dalla prima condizione si può ricavare a_0,

$$a_0 = \tfrac{1}{3}\sum_{n=-1}^{1} x(n) = \tfrac{1}{3}\cdot 3 = 1\ ,$$

mentre dalla seconda condizione si ha che

$$P_x = 19 = |a_0|^2 + 2|a_1|^2$$

da cui $|a_1|^2 = 9$ per cui $a_1 = a_{-1} = \pm 3$ e quindi

$$x(n) = 1 \pm 6\,\cos(\tfrac{2\pi}{3}n)\,.$$

Si poteva anche ragionare direttamente nel tempo, in quanto un segnale reale e pari periodico di periodo tre ha ovviamente $x(1) = x(-1)$ e pertanto ha forma

$$x(n) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\tfrac{2\pi}{3}n)$$

dove α_0 è sempre la media del segnale mentre α_1 si ricava dalla regola della potenza $P_x = \alpha_0^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2$.

Esercizio 3 – Filtraggio a tempo discreto [punti 3]

Sia dato il segnale

$$x(n) = 7 + 3\cos(\tfrac{2\pi}{3}n)\ .$$

Dire quali tra i seguenti segnali possono essere l'uscita di un filtro LTI con ingresso $x(n)$ e giustificare la risposta

1. $y(n) = \frac{1}{3}\sin(\frac{2\pi}{3}n)$
2. $z(n) = 1 + \pi\, e^{j\frac{2\pi}{3}n}$
3. $w(n) = 2 - j\, e^{j\frac{\pi}{3}n}$

Soluzione.

1. Sì, è possibile. Basta avere un filtro con risposta in frequenza che annulla la componente continua e modula opportunamente le armoniche alle fasi $\pm\frac{2\pi}{3}$.
2. Sì, è possibile. Basta avere un filtro con risposta in frequenza che lascia passare invariata la componente continua, cancella l'armonica alla fase $-\frac{2\pi}{3}$ e modula opportunamente l'armonica alla fase $\frac{2\pi}{3}$.
3. No, non è possibile poichè non vi è nessuna armonica alla fase $\frac{\pi}{3}$ in ingresso.

Esercizio 4 – Trasformata di Fourier e filtraggio [punti 7]

Il segnale

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{rect}(\tfrac{t}{\pi})$$

viene filtrato attraverso un filtro con risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \begin{cases} j\omega & , |\omega| < 2 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Si chiede di:

1. Trovare l'espressione analitica della trasformata $Y(j\omega)$ del segnale $y(t) = x * h(t)$ all'uscita del filtro, e disegnarne l'andamento [4 punti];

2. Identificare il segnale $y(t)$ e il suo tipo di simmetria [3 punti];

Soluzione.

1. La trasformata del segnale $x(t)$ è, per la regola di cambio di scala,

$$X(j\omega) = \pi \cdot \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\pi \cdot \tfrac{\omega}{2\pi}) = \mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{2})$$

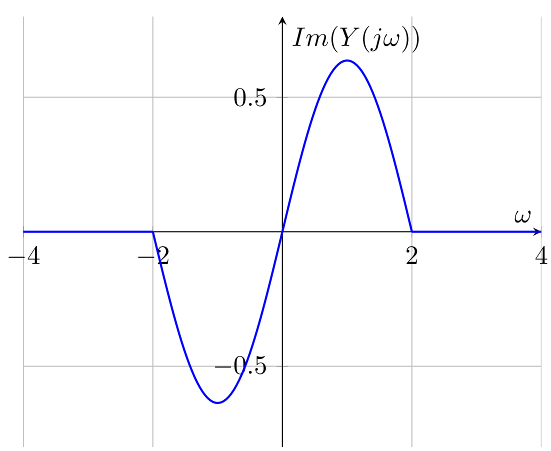
e pertanto

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} j\omega\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2}) & , |\omega| < 2 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

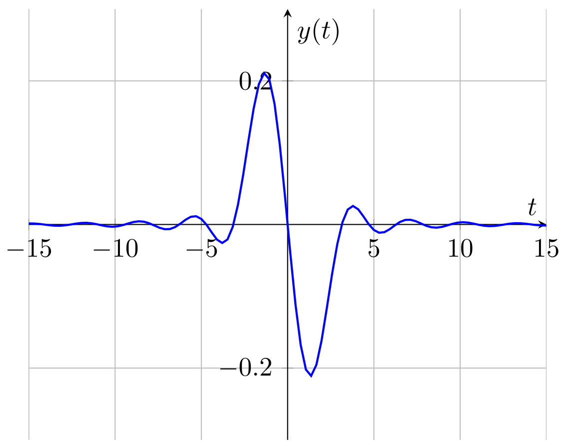
in cui possiamo scrivere il sinc in funzione del seno e limitare l'estensione della trasformata tramite una moltiplicazione per un rect, ottenendo

$$Y(j\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4}) \cdot j\omega \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\omega)}{\frac{\pi}{2}\omega} = 2j\sin(\tfrac{\pi}{2}\omega) \cdot \frac{1}{\pi}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4})$$

che è un segnale immaginario e dispari, quindi corrisponde ad un segnale reale e dispari. La trasformata è illustrata in figura



2. Per antitrasformare conviene espandere il seno tramite Eulero, per ottenere
$$Y(j\omega) = \tfrac{1}{\pi}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4})\,e^{j\frac{\pi}{2}\omega} - \tfrac{1}{\pi}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4})\,e^{-j\frac{\pi}{2}\omega}$$
che mostra due differenti modulazioni sulla trasformata
$$U(j\omega) = \tfrac{1}{\pi}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4}) \quad \Longrightarrow \quad u(t) = \tfrac{2}{\pi^2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{2}{\pi}t)$$
Ovvero, per la regola di traslazione nel tempo, si ha
$$\begin{aligned} y(t) &= u(t+\tfrac{\pi}{2}) - u(t-\tfrac{\pi}{2}) \\ &= \tfrac{2}{\pi^2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{2}{\pi}t+1) - \tfrac{2}{\pi^2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{2}{\pi}t-1) \end{aligned}$$
che è il segnale reale e dispari illustrato in figura



Esercizio 5 – Trasformata di Fourier a tempo discreto e filtraggio [punti 3]

Il segnale discreto
$$x(n) = \sin(\tfrac{\pi}{7}n) + e^{j\frac{\pi}{2}n} + \cos(\tfrac{17}{7}\pi n)$$
viene filtrato da un filtro passabasso ideale con fase di taglio $\theta_c = \frac{2}{7}\pi$. Determinare il segnale di uscita $y(n)$.

Soluzione.

Per la regola di filtraggio (reale) di sinusoidi ed esponenziali complessi, sfruttando il fatto che per un filtro passabasso la fase della trasformata è nulla, $\arg H(e^{j\theta}) = 0$, ed il modulo soddisfa $|H(e^{j\theta})| = H(e^{j\theta}) \in \{0, 1\}$, abbiamo
$$\begin{aligned} y(n) &= H(e^{j\frac{\pi}{7}})\sin(\tfrac{\pi}{7}n) + H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{\pi}{2}n} + H(e^{j\frac{17}{7}\pi})\cos(\tfrac{17}{7}\pi n) \\ &= H(e^{j\frac{\pi}{7}})\sin(\tfrac{\pi}{7}n) + H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{\pi}{2}n} + H(e^{j\frac{3}{7}\pi})\cos(\tfrac{3}{7}\pi n) \\ &= \sin(\tfrac{\pi}{7}n) \end{aligned}$$

in cui abbiamo sfruttato l'identità $\frac{3}{7}\pi = \frac{17}{7}\pi - 2\pi$ (grazie alla periodicità 2π nel dominio di Fourier, e la discriminazione data dalla fase di taglio, come illustrato in figura.