SEGNALI E SISTEMI
Prima prova di autovalutazione 2026
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2025-2026)
2 aprile 2026
SOLUZIONI

Esercizio 1 Proprietà dei Sistemi– [punti 7]

Si consideri il sistema discreto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+3} x(k)\cos(2(k-n)) - 2x(n+10)$$

si chiede:

1. Dire se il sistema è causale, lineare, tempo invariante, reale, BIBO stabile.
2. Calcolare la risposta impulsiva $g(n)$
3. FACOLTATIVO (PER CASA): calcolare la risposta al gradino discreto $1_0(n)$.

Soluzione.

1. Notiamo che il sistema è una convoluzione, infatti con un cambio di variabile $m = n - k$ (ovvero $k = n - m$) otteniamo

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-3}^{\infty} x(n-m)\cos(-2m) - 2x(n+10) \\ &= \sum_{m=-3}^{\infty} x(n-m)\cos(2m) - 2x(n+10) \end{aligned}$$

che riconosciamo essere una convoluzione e pertanto il sistema è LTI con risposta impulsiva

$$g(n) = \begin{cases} \cos(2n) & , n \geq -3 \\ -2 & , n = -10 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Il sistema è quindi lineare e tempo invariante. Il sistema non è causale in quanto la risposta impulsiva è attiva a tempi negativi. Il sistema non è BIBO stabile, in quanto la risposta impulsiva non decresce, e quindi non è assolutamente sommabile, ovvero

$$L_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| = \sum_{n=-3}^{\infty} |\cos(2n)| + 2 = \infty$$

Il sistema è inoltre reale in quanto la risposta impulsiva ha valori reali.

2. La risposta impulsiva è già stata calcolata.

3. FACOLTATIVO: Per la risposta al gradino possiamo sfruttare la definizione iniziale ed avere

$$y(n) = -2\,1_0(n+10) + y_1(n)\ , \quad y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+3} 1_0(k)\cos(2(k-n))$$

dove notiamo come $y_1(n)$ è sicuramente nullo per $n+3 < 0$, ovvero $n < -3$. Per $n \geq -3$ abbiamo invece

$$\begin{aligned}
y_1(n) &= \sum_{k=0}^{n+3} \cos(2(k-n)) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+3} e^{j2(k-n)} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+3} e^{-j2(k-n)} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{-j2n}\sum_{k=0}^{n+3} (e^{2j})^k + \tfrac{1}{2}e^{j2n}\sum_{k=0}^{n+3} (e^{-2j})^k \\
&= \tfrac{1}{2}e^{-j2n}\frac{1-e^{2j(n+4)}}{1-e^{2j}} + \tfrac{1}{2}e^{j2n}\frac{1-e^{-2j(n+4)}}{1-e^{-2j}} \\
&= \Re\left[\frac{e^{-j2n}-e^{8j}}{1-e^{2j}}\right] \\
&= \tfrac{1}{2-2\cos(2)}\Re\left[(e^{-j2n}-e^{8j})(1-e^{-2j})\right] \\
&= \tfrac{1}{2-2\cos(2)}\Re\left[e^{-j2n}-e^{-j2(n+1)}-e^{8j}+e^{6j}\right] \\
&= \frac{\cos(2n)-\cos(2n+2)+\cos(6)-\cos(8)}{2(1-\cos(2))} \\
&= \frac{2\sin(1)\sin(2n+1)+2\sin(1)\sin(7)}{4\sin(1)\sin(1)} \\
&= \frac{\sin(2n+1)+\sin(7)}{2\sin(1)} \\
&= \frac{\sin(n+4)\cos(n-3)}{\sin(1)}
\end{aligned}$$

in cui non serve assolutamente arrivare alla forma finale, anche se qui mostriamo come si possa ottenere un risultato molto compatto utilizzando le regole di seni e coseni. Pertanto si ottiene

$$y(n) = \begin{cases} 0 & , n < -10 \\ -2 & , -10 \leq n < -3 \\ \dfrac{\sin(n+4)\cos(n-3)}{\sin(1)} - 2 & , n \geq -3 \end{cases}$$

Esercizio 2 – Convoluzione e sue proprietà [punti 7]

Siano dati il segnali

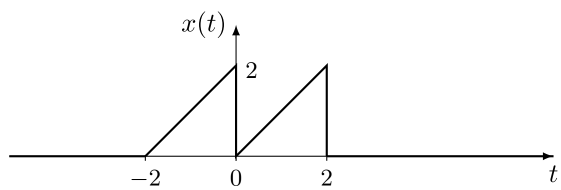
$$x(t) = t \cdot \text{rect}(\tfrac{t-1}{2}) + (t+2) \cdot \text{rect}(\tfrac{t+1}{2})$$
$$y(t) = 1(t+1) - 1$$

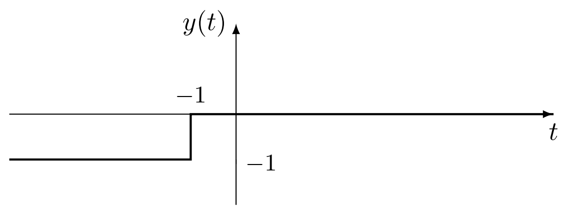
dove $1(t)$ è il gradino unitario.

1. Si disegnino i segnali $x(t)$ e $y(t)$.
2. Si calcoli $z(t) = x(t) * y(t)$ e se ne dia una rappresentazione grafica.
3. Dire se il segnale $w(t) = x(t-5) * y(t+5)$ è uguale a $z(t)$ e giustificare la risposta.
4. Dire se il sistema LTI avente risposta impulsiva $z(t)$ è causale e giustificare la risposta.

Soluzione.

1. I segnali sono rappresentati in figura





in cui notiamo come

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t+2)\ , \qquad x_1(t) = t \cdot \text{rect}(\tfrac{t-1}{2})$$

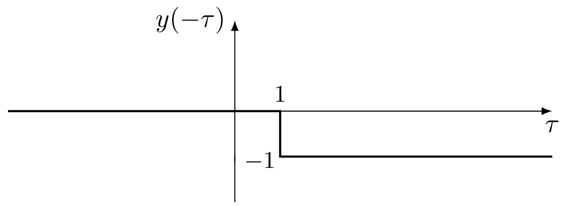
dove $x_1(t)$ è il triangolo in $[0, 2]$.

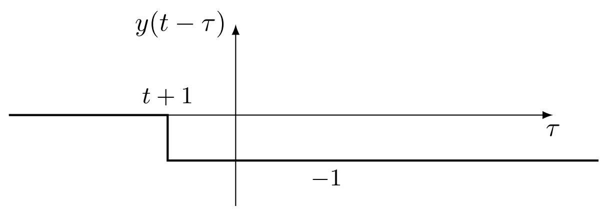
2. Per eseguire la convoluzione osserviamo come

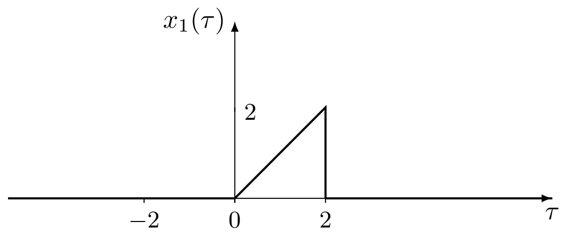
$$\begin{aligned} z(y) &= x * y(t) \\ &= [x_1(t) + x_1(t+2)] * y(t) \\ &= x_1 * y(t) + x_1 * y(t+2) \end{aligned}$$

e pertanto possiamo calcolarla partendo dalla convoluzione $z_1(t) = x_1 * y(t)$. Stiamo quindi sfruttando la linearità e la tempo-invarianza della convoluzione.

Per calcolare $z_1(t) = x_1 * y(t)$ usiamo il metodo grafico e disegnamo $y_-(\tau) = y(-\tau)$ e $y(t-\tau) = y_-(\tau - t)$ al variare di t:







osservando che, al variare di t abbiamo tre casistiche:

(a) $t+1 < 0$, in cui l'integrale è attivo nell'intervallo $[0, 2]$,

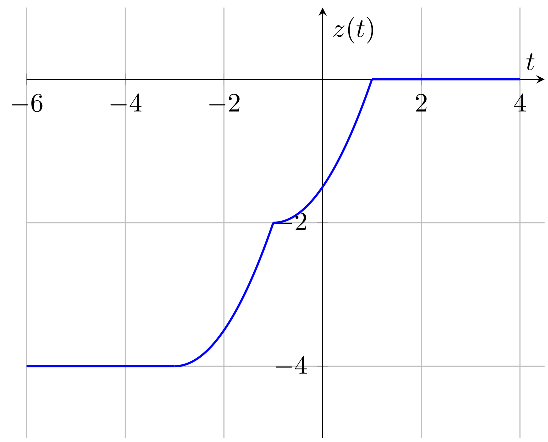
(b) $0 < t+1 < 2$ in cui l'integrale è attivo nell'intervallo $[t+1, 2]$,

(c) $t+1 > 2$, in cui il valore di uscita è nullo.

Quindi, si ottiene

$$z_1(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^2 \tau d\tau = -2 & , t < -1 \\ -\displaystyle\int_{t+1}^2 \tau d\tau = \dfrac{t^2 + 2t - 3}{2} & , -1 < t < 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$

Il grafico del segnale risultante $z(t) = z_1(t) + z_1(t+2)$ è riportato in figura



3. Sì, infatti,
$$x(t-5) * y(t+5) = x * y(t-5+5) = z(t)$$
per le proprietà della convoluzione in cui le trasalazioni si sommano. La cosa si può anche vedere usando il segnale intermedio $s(t) = x(t-5)$, per il quale
$$s * y(t) = y * s(t) = y * x(t-5) = x * y(t-5)$$
e per lo stesso motivo
$$s(t) * y(t+5) = s * y(t+5)$$
Il risultato si ottiene utilizzando la prima equivalenza nella seconda.

4. $z(t)$ non è identicamente nulla per $t < 0$, quindi il sistema LTI avente $z(t)$ come risposta impulsiva non è causale.

Esercizio 3 – Energia e Potenza [punti 3]

Sia dato il segnale
$$s(t) = 2\cos(3t) + \sin(\pi t) + 3e^{jt} \ .$$

1. Si dica se $s(t)$ è periodico, e di quale periodo.
2. Si calcoli la potenza di $s(t)$.
3. Si calcoli la potenza di $x(t) = s(t) + \cos(\pi t)$.
4. Si calcoli la potenza di $y(t) = s(t) + \mathrm{rect}(t)$.

Soluzione.

1. Il segnale è ovviamente non periodico in quanto le pulsazioni 3, 1 e π non stanno in rapporto razionale.

2. La potenza del segnale si calcola sfruttando le proprietà viste a lezione, unitamente al fatto che le tre pulsazioni 3, 1 e π sono distinte. Si ha

$$P_s = 2^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3^2 = 11 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{23}{2}$$

3. In questo caso la pulsazione aggiuntiva è uguale ad una presente nel segnale, e pertanto i contributi vanno sommati. Si può procedere utilizzando la formula di Eulero per seno e coseno, ovvero

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(3t) + 3e^{jt} + (\cos(\pi t) + \sin(\pi t)) \\ &= 2\cos(3t) + 3e^{jt} + \left(\tfrac{1}{2}e^{\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{-\pi t} + \tfrac{1}{2j}e^{\pi t} - \tfrac{1}{2j}e^{-\pi t}\right) \\ &= 2\cos(3t) + 3e^{jt} + \tfrac{1}{2}(1-j)e^{\pi t} + \tfrac{1}{2}(1+j)e^{-\pi t} \end{aligned}$$

e pertanto

$$P_x = 2^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3^3 + |\tfrac{1}{2}(1-j)|^2 + |\tfrac{1}{2}(1+j)|^2 = 12$$

Lo stesso risultato si poteva ricavare notando come

$$\cos(\pi t) + \sin(\pi t) = \sqrt{2}\,\sin(\pi t + \tfrac{\pi}{4})$$

4. In questo caso il risultato è semplicemente $P_y = P_s$ in quanto $\mathrm{rect}(t)$ è un segnale limitato ad energia finita. Volendo calcolare esplicitamente la potenza, si ha

$$\begin{aligned} P_s &= \lim_{T\to\inf} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (s(t) + \mathrm{rect}(t))^2 dt \\ &= \lim_{T\to\inf} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(s^2(t) + 2s(t)\,\mathrm{rect}(t) + \mathrm{rect}^2(t)\right) dt \end{aligned}$$

in cui i contriubuti dovuti a $2s(t)\,\mathrm{rect}(t)$ e $\mathrm{rect}^2(t) = \mathrm{rect}(t)$ sono ovviamente finiti in quanto il rect è attivo in un intervallo limitato, e pertanto danno contributo nullo alla potenza.