

Processi di Poisson

prof.ssa Carla De Francesco

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Ottimizzazione Stocastica

Processo Stocastico di Poisson

Processo stocastico: famiglia di variabili aleatorie che dipendono da un parametro t

Processo stocastico di Poisson, degli arrivi o delle nascite:

- Studio di eventi (*arrivi*) casuali che succedono nel tempo
- Conta quante volte si verifica un evento casuale in un certo intervallo di tempo
- Ad esempio : quanti clienti arrivano ad un certo sportello postale in un dato intervallo di tempo?

$N(t)$ = numero di arrivi secondo Poisson nell'intervallo $[0, t]$

$$N(0) = 0$$

Postulati del processo di Poisson

1

Pr [almeno un arrivo secondo Poisson in un periodo di durata τ]
 $= \lambda\tau + o(\tau)$

dove $o(\tau)$ indica *o piccolo di* τ ,

$\lambda = \textbf{tasso degli arrivi}$ = numero medio di arrivi nell'unità di tempo ($\lambda > 0$)

2

$N(t_2) - N(t_1)$ = numero di arrivi secondo Poisson in $(t_1, t_2]$,
dipende soltanto dall'ampiezza $t_2 - t_1$ dell'intervallo e non
dipende da t_1 o $N(t_1)$

3

Se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$, il numero di arrivi $N(t_2) - N(t_1)$,
 $N(t_3) - N(t_2)$, $\dots$ che accadono in intervalli di tempo disgiunti
sono variabili casuali mutuamente indipendenti

4

La probabilità che, in un intervallo di tempo di lunghezza τ , si
abbiano due o più arrivi è $o(\tau)$

Postulati del processo di Poisson

1

Pr [almeno un arrivo secondo Poisson in un periodo di durata τ]
 $= \lambda\tau + o(\tau)$

dove $o(\tau)$ indica *o piccolo di* τ ,

$\lambda =$ **tasso degli arrivi** = numero medio di arrivi nell'unità di tempo ($\lambda > 0$)

2

$N(t_2) - N(t_1)$ = numero di arrivi secondo Poisson in $(t_1, t_2]$,
dipende soltanto dall'ampiezza $t_2 - t_1$ dell'intervallo e non
dipende da t_1 o $N(t_1)$

3

Se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$, il numero di arrivi $N(t_2) - N(t_1)$,
 $N(t_3) - N(t_2)$, $\dots$ che accadono in intervalli di tempo disgiunti
sono variabili casuali mutuamente indipendenti

4

La probabilità che, in un intervallo di tempo di lunghezza τ , si
abbiano due o più arrivi è $o(\tau)$

Postulati del processo di Poisson

1

Pr [almeno un arrivo secondo Poisson in un periodo di durata τ]
 $= \lambda\tau + o(\tau)$

dove $o(\tau)$ indica *o piccolo di* τ ,

$\lambda =$ **tasso degli arrivi** = numero medio di arrivi nell'unità di tempo ($\lambda > 0$)

2

$N(t_2) - N(t_1)$ = numero di arrivi secondo Poisson in $(t_1, t_2]$,
dipende soltanto dall'ampiezza $t_2 - t_1$ dell'intervallo e non
dipende da t_1 o $N(t_1)$

3

Se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$, il numero di arrivi $N(t_2) - N(t_1)$,
 $N(t_3) - N(t_2)$, $\dots$ che accadono in intervalli di tempo disgiunti
sono variabili casuali mutuamente indipendenti

4

La probabilità che, in un intervallo di tempo di lunghezza τ , si
abbiano due o più arrivi è $o(\tau)$

Postulati del processo di Poisson

1

Pr [almeno un arrivo secondo Poisson in un periodo di durata τ]
 $= \lambda\tau + o(\tau)$

dove $o(\tau)$ indica *o piccolo di* τ ,

$\lambda =$ **tasso degli arrivi** = numero medio di arrivi nell'unità di tempo ($\lambda > 0$)

2

$N(t_2) - N(t_1)$ = numero di arrivi secondo Poisson in $(t_1, t_2]$,
dipende soltanto dall'ampiezza $t_2 - t_1$ dell'intervallo e non
dipende da t_1 o $N(t_1)$

3

Se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$, il numero di arrivi $N(t_2) - N(t_1)$,
 $N(t_3) - N(t_2)$, $\dots$ che accadono in intervalli di tempo disgiunti
sono variabili casuali mutuamente indipendenti

4

La probabilità che, in un intervallo di tempo di lunghezza τ , si
abbiano due o più arrivi è $o(\tau)$

Evoluzione di un processo di Poisson

$$P_m(t) = P[N(t) = m] \quad m \geq 0 \text{ intero}$$

Considero l'evoluzione del sistema nell'intervallo $(t, t + \tau]$:

$$P_{m+1}(t+\tau) = P_{m+1}(t) \cdot (1 - \lambda\tau - o(\tau)) + P_m(t) \cdot (\lambda\tau + o(\tau)) + o(\tau)$$

$$\frac{P_{m+1}(t+\tau) - P_{m+1}(t)}{\tau} = -\lambda P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

$$P'_{m+1}(t) = -\lambda P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) \quad m \geq 0$$

Caso base:

$$P_0(t+\tau) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda\tau - o(\tau))$$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

Evoluzione di un processo di Poisson

$$P_m(t) = P[N(t) = m] \quad m \geq 0 \text{ intero}$$

Considero l'evoluzione del sistema nell'intervallo $(t, t + \tau]$:

$$P_{m+1}(t+\tau) = P_{m+1}(t) \cdot (1 - \lambda\tau - o(\tau)) + P_m(t) \cdot (\lambda\tau + o(\tau)) + o(\tau)$$

$$\frac{P_{m+1}(t+\tau) - P_{m+1}(t)}{\tau} = -\lambda P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

$$P'_{m+1}(t) = -\lambda P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) \quad m \geq 0$$

Caso base:

$$P_0(t+\tau) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda\tau - o(\tau))$$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

Evoluzione di un processo di Poisson

$$P_m(t) = P[N(t) = m] \quad m \geq 0 \text{ intero}$$

Considero l'evoluzione del sistema nell'intervallo $(t, t + \tau]$:

$$P_{m+1}(t+\tau) = P_{m+1}(t) \cdot (1 - \lambda\tau - o(\tau)) + P_m(t) \cdot (\lambda\tau + o(\tau)) + o(\tau)$$

$$\frac{P_{m+1}(t+\tau) - P_{m+1}(t)}{\tau} = -\lambda P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) + \frac{o(\tau)}{\tau}$$

$$P'_{m+1}(t) = -\lambda P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) \quad m \geq 0$$

Caso base:

$$P_0(t+\tau) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda\tau - o(\tau))$$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

Sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} P'_{m+1}(t) = -\lambda P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) & m \geq 0 \\ P'_0(t) = -\lambda P_0(t) \end{cases}$$

Sistema di infinite equazioni differenziali lineari del primo ordine, integrabile per ricorrenza.

Condizioni iniziali:

$$P_0(0) = 1, P_m(0) = 0 \text{ per } m \geq 1$$

La funzione di probabilità di Poisson

Risolvendo questo sistema di infinite equazioni differenziali si ricava (verificarlo):

$$P_m(t) = P[N(t) = m] = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow N(t)$ è una v.a. di Poisson di parametro λt (con $\lambda > 0$)

$$E[N(t)] = \lambda t$$

$$\sigma_{N(t)}^2 = \lambda t$$

La v.a. di Erlang

Iniziamo ad osservare un processo di Poisson al tempo $t = 0$.
Vogliamo conoscere la distribuzione della v.a.

L_k = tempo di avvenimento del k -esimo arrivo ($k = 1, 2, \dots$)

Possiamo mostrare che (successiva slide):

$$f_{L_k}(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \quad x \geq 0 \quad (1)$$

f_{L_k} è la densità di probabilità di una variabile aleatoria detta di Erlang di ordine k (somma di k variabili aleatorie i.i.d. $\text{Exp}(\lambda)$). Si ha:

$$E[L_k] = \frac{k}{\lambda} \quad \sigma_{L_k}^2 = \frac{k}{\lambda^2}$$

Dimostrazione di formula (1)

$$f_{L_k}(x) dx = \text{Prob} \{k - \text{esimo arrivo succede in } (x, x + dx]\}$$

$$= \text{Prob} \{ \text{esattamente } k-1 \text{ arrivi in } [0, x] \\ \text{e un arrivo in } (x, x + dx] \}$$

$$\stackrel{(post3)}{=} \text{Prob} \{ \text{esattamente } k-1 \text{ arrivi in } [0, x] \} \cdot \\ \text{Prob} \{ \text{un arrivo in } (x, x + dx] \}$$

$$\stackrel{(post1,4)}{=} P[N(x) = k - 1] \cdot (\lambda dx + o(dx))$$

$$= \frac{(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} (\lambda dx + o(dx))$$

Dividendo per dx e ignorando il termine infinitesimo si ottiene (1).

Tempi di interarrivo in un processo di Poisson

Considerando il caso $k = 1$, si ottiene la distribuzione della v.a.

L_1 = tempo di avvenimento del primo arrivo

$\stackrel{(post2,3)}{=}$ tempo che separa due arrivi consecutivi

$$f_{L_1}(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Il tempo che separa due arrivi consecutivi è distribuito secondo una variabile aleatoria $Exp(\lambda)$. Si ha:

$$E[L_1] = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma_{L_1}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

La proprietà della mancanza di memoria

- 1 Se noi osserviamo un processo di Poisson con tasso λ a partire da un qualsiasi istante di tempo, la funzione di densità della variabile aleatoria X , tempo che dobbiamo attendere per vedere il prossimo arrivo, è data da

$$f_X(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

indipendentemente da quanto tempo prima si è verificato l'ultimo arrivo.

- 2 Fissato un intervallo di osservazione ed un numero di arrivi, gli istanti di arrivo (in un processo di Poisson) sono distribuiti in modo indipendente e uniforme nell'intervallo di osservazione.

La proprietà della mancanza di memoria

- 1 Se noi osserviamo un processo di Poisson con tasso λ a partire da un qualsiasi istante di tempo, la funzione di densità della variabile aleatoria X , tempo che dobbiamo attendere per vedere il prossimo arrivo, è data da

$$f_X(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

indipendentemente da quanto tempo prima si è verificato l'ultimo arrivo.

- 2 Fissato un intervallo di osservazione ed un numero di arrivi, gli istanti di arrivo (in un processo di Poisson) sono distribuiti in modo indipendente e uniforme nell'intervallo di osservazione.

Processi di Poisson multipli ed indipendenti

- 1 La somma di K processi di Poisson indipendenti è un processo di Poisson con parametro uguale alla somma dei K parametri.
- 2 Dati due processi di Poisson indipendenti con parametri λ_1 e λ_2 rispettivamente, e indicando con X_1 e X_2 il tempo fino al successivo arrivo da ognuno dei due processi, si ha

$$P[X_1 < X_2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Per dimostrarlo (fate i conti) considerate il vettore aleatorio (X_1, X_2) :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \quad \text{con } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$P[X_1 < X_2] = \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_2 dx_1 = \dots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Processi di Poisson multipli ed indipendenti

- 1 La somma di K processi di Poisson indipendenti è un processo di Poisson con parametro uguale alla somma dei K parametri.
- 2 Dati due processi di Poisson indipendenti con parametri λ_1 e λ_2 rispettivamente, e indicando con X_1 e X_2 il tempo fino al successivo arrivo da ognuno dei due processi, si ha

$$P[X_1 < X_2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Per dimostrarlo (fate i conti) considerate il vettore aleatorio (X_1, X_2) :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \quad \text{con } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$P[X_1 < X_2] = \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_2 dx_1 = \dots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$