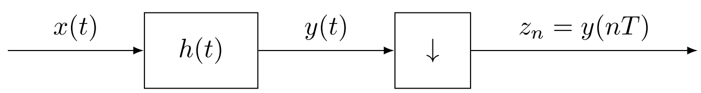
SEGNALI E SISTEMI
2 febbraio 2026
quarto appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Il segnale $x(t) = \operatorname{sinc}^2(t)$ viene filtrato da un filtro ideale con risposta impulsiva $h(t) = \frac{3}{2}\operatorname{sinc}(\frac{3}{2}t)$, quindi campionato a passo $T = 1$, come illustrato in figura.



Si derivino:

1. le trasformate di Fourier dei tre segnali $x(t)$, $y(t)$ e z_n, disegnandone il loro andamento [5 punti];
2. l' andamento nel tempo dei segnali $y(t)$ e z_n [2 punti].

Soluzione.

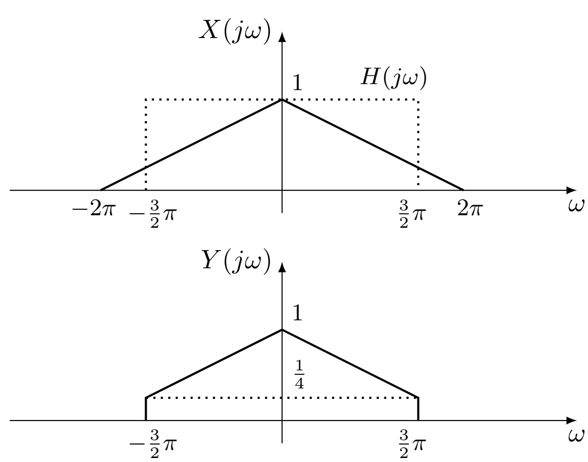
1. Per il segnale $x(t)$ la trasformata si trova dalla coppia sinc quadro/triangolo

$$X(j\omega) = \operatorname{triangle}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

mentre per il segnale $y(t)$ si ha

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)\ , \qquad H(j\omega) = \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{3\pi}\right)$$

dove la trasformata del filtro è stata identificata dalla coppia sinc/rect applicando la regola di scala. Il loro andamento è riportato in figura



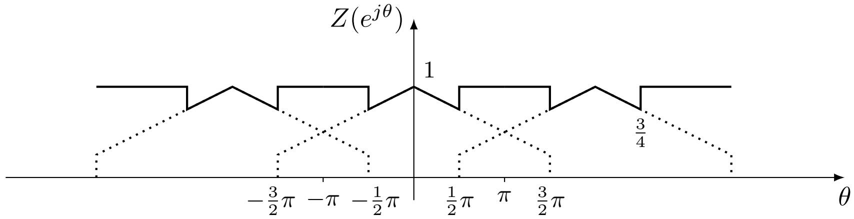
Dalla figura notiamo inoltre come

$$Y(j\omega) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{3\pi}\right) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triangle}\left(\frac{\omega}{\frac{3}{2}\pi}\right)$$

Per il segnale z_n abbiamo

$$Z(e^{j\theta}) = \mathrm{rep}_{2\pi} Y(j\theta)$$

che si interpreta bene graficamente



e restituisce

$$Z(e^{j\theta}) = 1 + \tfrac{1}{4}\mathrm{rep}_{2\pi}\Big(\mathrm{triang}(\tfrac{2}{\pi}\theta) - \mathrm{rect}(\tfrac{1}{\pi}\theta)\Big)$$

2. Nel tempo l'antitrasformata di $Y(j\omega)$ restituisce

$$\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{3}{2}t) + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\,\mathrm{sinc}^2(\tfrac{3}{4}t) \\ &= \tfrac{3}{8}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{3}{2}t) + \tfrac{9}{16}\,\mathrm{sinc}^2(\tfrac{3}{4}t) \end{aligned}$$

mentre

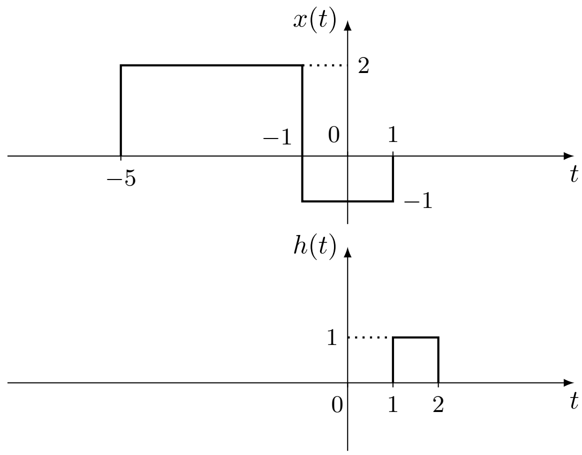
$$z_n = y(n) = \tfrac{3}{8}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{3}{2}n) + \tfrac{9}{16}\,\mathrm{sinc}^2(\tfrac{3}{4}n)$$

Dalla forma di $Z(e^{j\theta})$, per antitrasformata, possiamo anche notare come

$$z_n = \delta_n + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\,\mathrm{sinc}^2(\tfrac{1}{4}n) - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{1}{2}n)$$

Esercizio 2 [punti 7]

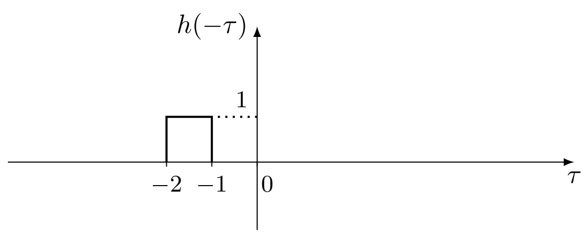
Si considerino i segnali $x(t)$ e $h(t)$ rappresentati in figura.

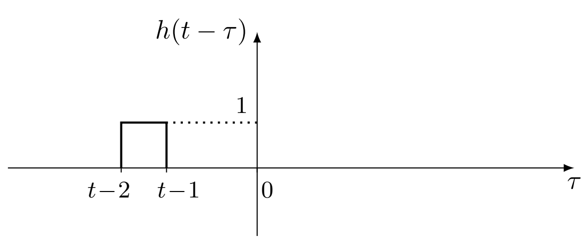


1. Trovare il segnale $y(t) = x(t) * h(t)$ [5 punti].
2. Dire se, per i segnali di questo esercizio, le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la risposta [2 punti]:
   a) $x(t) * h(-t) = y(t+3)$
   b) $x(-t) * h(t) = y(t+3)$

Soluzione.

1. Si può procedere con il metodo grafico. Disegnamo innanzitutto i segnali $h(-\tau)$ ed $h(t-\tau)$

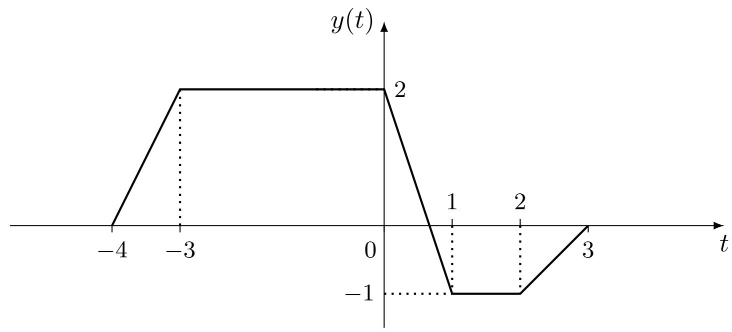




Quindi valutiamo il risultato nelle varie regioni, ovvero

- Per $t-1 < -5$, ovvero $t < -4 \rightarrow y(t) = 0$.
- Per $t-1 \geq -5$ e $t-2 < -5$, ovvero $3 \leq t < 0 \rightarrow y(t) = \int_{-5}^{t-1} 2d\tau = 2t+8$
- Per $-3 < t \leq 0 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{t-1} 2d\tau = 2$
- Per $0 < t \leq 1 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{-1} 2d\tau - \int_{-1}^{t-1} 1d\tau = -3t+2$
- Per $1 < t \leq 2 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{t-1} -1d\tau = -1$
- Per $2 < t \leq 3 \rightarrow y(t) = \int_{t-2}^{1} -1d\tau = --3+t$
- Per $t \geq 3 \rightarrow y(t) = 0$.

Il segnale $y(t)$ (che rispetta la regola dei supporti) è mostrato in figura.



2. La prima equivalenza $x(t) * h(-t) = y(t+3)$ è vera poichè, per il segnale $h(t)$, vale $h(-t) = h(t+3)$. Per la proprietà di tempo-invarianza si ha che $x(t) * h(-t) = x(t) * h(t+3) = y(t+3)$

   La seconda equivalenza $x(-t) * h(t) = y(t+3)$ è invece falsa poichè, per il segnale $x(t)$, $x(-t) \neq x(t+3)$.

Esercizio 3 [punti 7]

Dato il sistema LTI descritto dall'equazione alle differenze:

$$y(n) - \tfrac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

con $x(n) = u(n)$ e $u(n)$ il gradino unitario discreto.

1. Trovare la funzione di trasferimento [1 punto].
2. Dire se il sistema è BIBO stabile [1 punto].
3. Trovare la risposta forzata $y(n)$ [3 punti].
4. Un segnale esponenziale complesso $w(n) = 3\,e^{j\theta_0 n}$ di pulsazione $\theta_0 = \pi$ viene dato in ingresso al sistema. Trovare l'ampiezza dell'uscita corrispondente a regime [2 punti].

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione:
$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$
2. Vi è un unico polo in $z = \frac{1}{2}$, che ha modulo minore di 1, pertanto il sistema è BIBO stabile.
3. La trasformata zeta di $x(n)$ è
$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$
e pertanto quella della risposta forzata risulta
$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$
in cui l'espressione in fratti semplici assicura una antitrasformata
$$y(n) = \left[2 - (\tfrac{1}{2})^n\right] u(n)\ .$$
4. Dalla funzione di trasferimento si può trovare la risposta in frequenza del sistema
$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$
Per $\theta = \theta_0 = \pi$
$$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\ .$$
Per la proprietà di autofunzione degli esponenziali complessi (e per la BIBO stabilità del sistema) l'uscita, a regime, ha ampiezza pari al prodotto tra l'ampiezza dell'ingresso e $|H(e^{j\theta_0})|$, ed è quindi pari a 2.

Esercizio 4 [punti 3]

Si consideri il sistema a tempo continuo definito da:

$$y(t) = \int_{t-2}^{t} x(\tau)\, d\tau + |x(t)| + x(1-t)$$

Dire se è

1. lineare e/o causale [1 punto],
2. tempo-invariante [1 punto],
3. BIBO stabile [1 punto],

motivando opportunamente le risposte.

Soluzione.

1. Il sistema NON è lineare a causa del secondo termine $|x(t)|$ che non è una funzione lineare, e NON è nemmeno causale sempre a causa dell'inversione teporale nel terzo termine $x(1-t)$.
2. Il sistema NON è tempo-invariante a causa del termine $x(1-t)$ che presenza un'inversione temporale.
3. Il sistema è invece BIBO stabile, infatti, per $|x(t)| \leq M$, $M > 0$, si ha

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| \int_{t-2}^{t} x(\tau)\, d\tau + |x(t)| + x(1-t) \right| \\
&\leq \int_{t-2}^{t} |x(\tau)|\, d\tau + |x(t)| + |x(1-t)| \\
&\leq \int_{t-2}^{t} M\, d\tau + M + M \\
&= 4M
\end{aligned}$$

Esercizio 5 [punti 3]

Si consideri il segnale periodico

$$x(t) = 3\, e^{j\pi t} + \cos(\tfrac{3}{4}\pi t) - (1+j)\, e^{-j\frac{\pi}{4}t} + 2\sin(\tfrac{7}{4}\pi t)$$

Si chiede di

1. identificare la pulsazione comune ω_0 e la periodicità T_p [1 punto],
2. identificare i coefficienti della serie di Fourier X_k [1 punto],
3. valutare il segnale in uscita $y(t)$ da un filtro passa-alto ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{3}{2}\pi$ se il segnale di ingresso è $x(t)$ [1 punto].

Soluzione.

1. La pulsazione di riferimento è $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$, secondo cui possiamo scrivere il segnale nella forma
$$x(t) = 3\, e^{j4\omega_0 t} + \cos(3\omega_0 t) - (1+j)\, e^{-j\omega_0 t} + 2\sin(7\omega_0 t)$$
e pertanto $T_p = 2\pi/\omega_0 = 8$.
2. Per ispezione da
$$\begin{aligned} x(t) = 3\, e^{j4\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{j3\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-j3\omega_0 t} \\ - (1+j)\, e^{-j\omega_0 t} - je^{j7\omega_0 t} + je^{-j7\omega_0 t} \end{aligned}$$
si ha
$$X_k = \begin{cases} 3 & , k = 4 \\ -(1+j) & , k = -1 \\ \frac{1}{2} & , k = -3, 3 \\ j & , k = -7 \\ -j & , k = 7 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$
3. In questo caso rimangono le sole componenti con pulsazione maggiore di $\frac{3}{2}\pi = \frac{6}{4}\pi$, ovvero
$$y(t) = 2\sin(7\omega_0 t) = 2\sin(\tfrac{7}{4}\pi t)\ .$$

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab, i valori di un segnale $x(t)$ sono collezionati nel vettore reale x di lunghezza $N = 512$ associato ad un vettore dei tempi t spaziati con passo di campionamento T noto. Quale dei seguenti codici calcola correttamente i campioni della trasformata di Fourier di $x(t)$ e ne dà una corretta rappresentazione?

1. $X = \mathrm{fft}(T * \mathrm{fftshift}(x));$
   $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi/T;$
   $\mathrm{semilogy}(\omega, \mathrm{abs}(X));$

2. $X = \mathrm{fftshift}(\mathrm{fft}(x));$
   $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi/T;$
   $\mathrm{plot}(\omega, \mathrm{abs}(X));$

3. $X = \mathrm{fftshift}(\mathrm{fft}(x));$
   $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi;$
   $\mathrm{plot}(\omega, \mathrm{abs}(X));$

4. $X = \mathrm{fftshift}(T * \mathrm{fft}(x));$
   $\omega = (-N/2 : N/2 - 1) * 2 * \pi/T;$
   $\mathrm{semilogy}(\omega, \mathrm{abs}(X)).$

Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione.

La risposta corretta la quarta. La prima è errata perchè esegue fftshift sul vettore x. La seconda è errata perchè non moltiplica la trasformata del vettore x per il passo di campionamento. La terza è errata perchè l'asse della pulsazioni ω manca della divisione per T.