

15/01/2026

Risoluzione del Compito modello

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad f(x) &= \ln(x^2 - 2x + 1) - 12x^2 \\ &= \ln((x-1)^2) - \ln(e^{12x^2}) \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}}\right)\end{aligned}$$

$$1.1) \text{ dominio di } f: \frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}} > 0 \iff \frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}} > 0$$

$$\iff x \neq 1$$

Quindi il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Si osservi che, siccome il dominio della funzione non è simmetrico intorno a zero, la funzione non ha proprietà di simmetria.

• Dobbiamo calcolare limiti $\begin{matrix} x \rightarrow 1^- & x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 1^+ & x \rightarrow +\infty \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}}\right) \underset{\downarrow}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \ln z = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}} = \frac{0^+}{e^{12}} = 0^+ \text{ e } \ln \text{ è continua}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}}\right) \underset{\downarrow}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \ln z = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}} = \frac{0^+}{e^{12}} = 0^+ \text{ e } \ln \text{ è continua}$$

Questo accade perché $(x-1)^2$ è una funzione ≥ 0 .

In particolare Concludiamo che $x=1$ è un asintoto verticale.

Osserviamo adesso che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{regola de} \\ \text{De L'Hôpital}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)}{24x e^{12x^2}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{regola} \\ \text{de De L'Hôpital}}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{24e^{12x^2} + 576x^2 e^{12x^2}} = 0^+$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{e^{12x^2}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{stesso} \\ \text{ragionamento}}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(4 + 576x^2) e^{12x^2}} = 0^+$$

Quindi, siccome la funzione logaritmo è continua,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \ln z = -\infty. \text{ Questo ci}$$

permette allora concludere l'assenza di asintoti orizzontali.

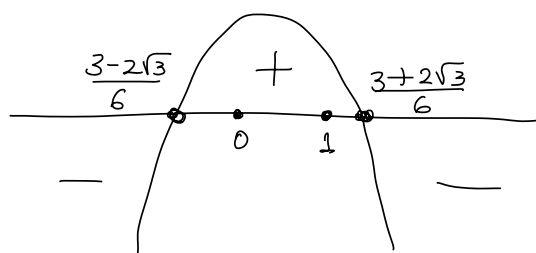
$$\begin{aligned} 1.2) \quad f'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} \cdot 2(x-1) - 24x \\ &= \frac{2}{x-1} - 24x = \frac{2 - 24x(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{-24x^2 + 24x + 2}{x-1} \end{aligned}$$

Segno della derivata : $-24x^2 + 24x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-24) \cdot 2}}{-48} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \frac{-24 \pm \sqrt{(24+8)24}}{-48} = \frac{-24 \pm \sqrt{32 \cdot 24}}{-48} = \frac{-24 \pm \sqrt{2^5 \cdot 2^3 \cdot 3}}{-48} \\ &= \frac{-24 \pm 16\sqrt{3}}{-48} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Siccome il grafico di $-24x^2 + 24x + 2$ è una parabola di concavità negativa, abbiamo che il suo grafico è della forma



Possiamo allora analizzare il segno della derivata $f'(x)$ nel seguente modo :

x		$\frac{3-2\sqrt{3}}{6}$		1		$\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$	
$-24x^2 + 24x + 2$	-	0	+	+	+	0	-
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x) = \frac{-24x^2 + 24x + 2}{x-1}$	+	0	-	n.d.	+	0	-

Da qui concludiamo allora che f è crescente nell'intervallo $]-\infty, \frac{3-2\sqrt{3}}{6}[$ e nell'intervallo $]1, \frac{3+2\sqrt{3}}{6}[$ e decrescente

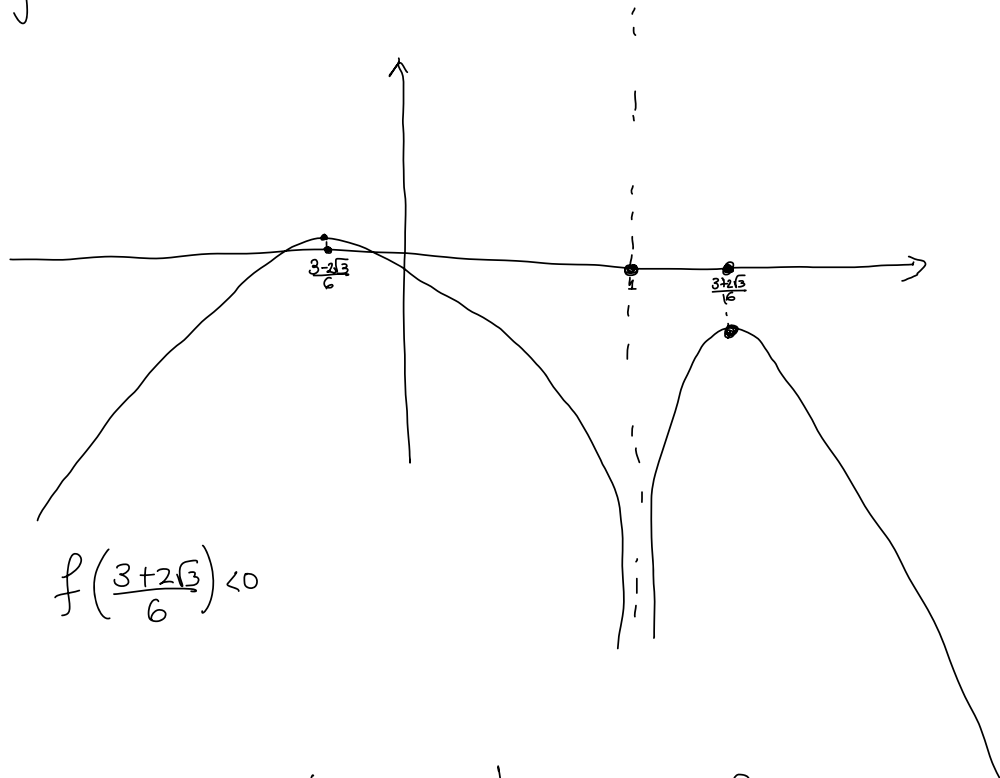
nel intervallo $] \frac{3-2\sqrt{3}}{6}, 1[$ e nel intervallo $] \frac{3+2\sqrt{3}}{6}, +\infty[$.
 Concludiamo quindi che f ha un massimo nel punto
 $x = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$ e un altro massimo nel punto $x = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$.

1.3) Studiamo adesso la seconda derivata:

$$f''(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} - 24.$$

Adesso si noti che, siccome $(x-1)^2 > 0$ per $x \neq 1$,
 abbiamo che $f''(x) < 0 \quad \forall x \neq 1$, per cui la
 concavità di f è sempre negativa e non ci sono
 punti di flesso.

1.4)



$$f\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right) > 0 \quad f\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right) < 0$$

(calcolatrice)

1.5) Equazione della retta tangente al grafico di f in $x=0$
 $(y-f(0)) = f'(0)(x-0)$

$$\Rightarrow y - (\ln(1)) = \left(\frac{2}{0-1} - 24 \cdot 0 \right) \cdot (x-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2x}$$

② 2.1) $\int_0^1 x^2 e^x dx = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Integrazione} \\ \text{per parti, } f=x^2 \\ g'=e^x}}{[x^2 e^x]_0^1} - \int_0^1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integrazione} \\ \text{per parti} \\ f=2x \quad g'=e^x}}{2x e^x} dx =$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - \left([2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2 e^x dx \right)$$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - [2x e^x]_0^1 + [2 e^x]_0^1 =$$

$$= (1^2 e^1 - 0) - (2e^1 - 0) + (2e^1 - 2)$$

$$= e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

2.2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx$. Questo è un integrale generalizzato,

ha nell'estremo 0 che nel estremo $+\infty$. Calcoliamo prima l'integrale indefinito.

$$\int \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sostituzione} \\ t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx}}{=} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t) =$$

$$= \arctan(\ln(x))$$

Adesso $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx$. (*)

Calcoliamo $\int_0^M \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx$ che è anche un integrale generalizzato.

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^M \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctan(\ln M) - \arctan(\ln \varepsilon) \\ &= \arctan(\ln M) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctan(\ln \varepsilon)\end{aligned}$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\ln \varepsilon \rightarrow -\infty$, per cui

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctan(\ln \varepsilon) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \arctan z = -\pi/2$$

$\downarrow$
arctan è
continua

$$\text{Quindi } \int_0^M \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx = \arctan(\ln M) + \pi/2.$$

Adesso torniamo a $(*)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \arctan(\ln M) + \pi/2 \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \arctan z + \pi/2\end{aligned}$$

siccome

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \ln M = +\infty$$

e $\ln$ è continua

$$= \pi/2 + \pi/2 = \pi$$



$$\textcircled{3} \quad y' = \frac{2+x}{x} y - e^x$$

$$\Rightarrow y' - \frac{2+x}{x} y = -e^x$$

3.1) Equazione omogenea: $y' - \underbrace{\frac{2+x}{x}}_{a(x)} y = 0$

$$A(x) = \int a(x) dx = \int_x -\frac{2+x}{x} dx = \int -\frac{2}{x} - 1 dx$$

$$= -\ln(x^2) - x + c$$

Quindi, sappiamo che la soluzione dell'equazione omogenea è del tipo

$$y = k e^{-A(x)} = k e^{\ln(x^2) + x}$$

$$= k x^2 e^x$$

Soluzione particolare: Usiamo il metodo della variazione della costante per cercare una soluzione del tipo $k(x) e^{-A(x)}$ e sappiamo dalle lezioni che tale $k(x)$ viene fuori facendo

$$k(x) = \int f(x) e^{A(x)} dx, \text{ dove}$$

$$f(x) = -e^x$$

Quindi, calcoliamo

$$\begin{aligned}
 k(x) &= \int -e^x e^{-\ln(x^2)-x} dx \\
 &= \int -e^{-\ln(x^2)} dx = \int -\frac{1}{x^2} dx \\
 &= \frac{1}{x} + C
 \end{aligned}$$

Quindi una soluzione particolare è

$$y = \frac{1}{x} x^2 e^x = x e^x$$

e allora la soluzione generale dell'equazione è

$$\begin{aligned}
 y &= k x^2 e^x + x e^x \\
 \Rightarrow y &= \underline{(k x^2 + x) e^x}
 \end{aligned}$$

3.2) Condizione iniziale: $y(1) = 2e$.

$$y(1) = (k \cdot 1^2 + 1) e^1 = (k+1) e$$

Quindi $y(1) = 2e \Leftrightarrow k=1$ e, quindi, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = (x^2 + x) e^x.$$

$$(4) \quad y'' - 2y' - 15y = (x+2)e^{5x}$$

Eq. omogenea: $y'' - 2y' - 15y = 0$

Polinomio caratteristico: $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-15)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -3$$

Soluzione generale:

$$y(x) = k_1 e^{5x} + k_2 e^{-3x}$$

Soluzione particolare dell'equazione non-omogenea usando il metodo della somiglianza. Siccome $f(x) = (x+2)e^{5x}$ è il prodotto di un polinomio di grado 1 con un'esponenziale, e siccome 5 è radice singola del polinomio caratteristico, cerchiamo soluzioni del genere $y = (ax+b)x e^{5x} = (ax^2+bx)e^{5x}$

$$\begin{aligned} y' &= (2ax+b)e^{5x} + (ax^2+bx) \cdot 5e^{5x} \\ &= (5ax^2 + (2a+5b)x + b)e^{5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (10ax + 2a+5b)e^{5x} + 5 \cdot (5ax^2 + (2a+5b)x + b)e^{5x} \\ &= (25ax^2 + (20a+25b)x + 2a+10b)e^{5x} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$(25ax^2 + (20a+25b)x + 2a+10b) e^{5x} - 2(5ax^2 + (2a+5b)x + b) e^{5x} - 15(ax^2 + bx) e^{5x} = (x+2) e^{5x}$$

$$\Leftrightarrow (20a + 25b - 4a - 10b - 15b)x + (2a + 10b - 2b) = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a = 1 \\ 2a + 8b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} + 8b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{16} \\ b = \frac{15}{64} \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare è $y(x) = \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{15}{64}x\right) e^{5x}$

La soluzione generale è allora

$$y(x) = k_1 e^{5x} + k_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{15}{64}x\right) e^{5x}$$

$$4.2) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \quad y(0) = k_1 + k_2$$

$$y'(x) = 5k_1 e^{5x} - 3k_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{8}x + \frac{15}{64}\right) e^{5x} + 5\left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{15}{64}x\right) e^{5x}$$

$$y'(0) = 5k_1 - 3k_2 + \frac{15}{64}$$

Quindi abbiamo il sistema $\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 5k_1 - 3k_2 + \frac{15}{64} = -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = -k_1 \\ 5k_1 + 3k_1 = -2 - \frac{15}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 8k_1 = \frac{-143}{64} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = \frac{143}{512} \\ k_1 = -\frac{143}{512} \end{cases} \text{ . Quindi la soluzione del problema}$$

di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{143}{512} e^{5x} + \frac{143}{512} e^{-3x} + \left(\frac{1}{16} x^2 + \frac{15}{64} x \right) e^{5x}$$

$$\textcircled{5} f(x, y) = e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{s.1) } \nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= \left((-x^2 + 1) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2}, -2y e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} \right) \end{aligned}$$

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2x e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} + (-x^2 + 1) \cdot (-x^2 + 1) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} & -2y(-x^2 + 1) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} \\ -2y(-x^2 + 1) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} & -2e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} + (-2y)(-2y) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ((1-x^2)^2 - 2x) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} & -2y(1-x^2) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} \\ -2y(1-x^2) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} & (4y^2 - 2) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{s.2) Punti critici: } \nabla f(x, y) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x^2 + 1) e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} = 0 \\ -2y e^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (=) \\ \text{esponenziale} \\ \text{non si annulla mai} \end{matrix} \quad \begin{cases} 1-x^2=0 \\ 2y=0 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Due punti Critici : $(1,0)$ e $(-1,0)$.

$$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} -2 \cdot e^{-1/3+1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1/3+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2/3} & 0 \\ 0 & -2e^{2/3} \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(1,0) = (-2e^{2/3})^2 = 4e^{4/3} > 0$$

Si come $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1,0) = -2e^{2/3} < 0$, allora abbiamo che $(1,0)$ è un massimo locale.

$$H(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 2e^{2/3} & 0 \\ 0 & -2e^{2/3} \end{pmatrix} \quad \det H(f)(-1,0) = -4e^{4/3} < 0$$

e quindi $(-1,0)$ è un punto di sella

8.3) Piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$:

$$(z - f(1,1)) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$\Rightarrow z - e^{-1/3} = -2e^{-1/3}(y-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -2e^{-1/3}y + 3e^{-1/3}}$$