

14/01/2026

Definizione 1.2 Per numeri naturali m e $n \geq 1$, una tabella della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{con } m \text{ righe} \\ \text{e } n \text{ colonne} \end{array}$$

si dice una matrice $m \times n$. I numeri (reali o complessi) in una matrice si dicono le entrate della matrice e vengono indicizzati con due indici i e j , il primo di cui indica la riga e il secondo la colonna. L'insieme di tutte le matrici m per n con entrate in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ viene scritto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o $M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

Dato un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1 colonna extra
per i termini noti
↓

la matrice completa del sistema è una matrice $m \times (n+1)$ definita da

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}} \rightarrow$ termini noti b
 $\downarrow$
 matrice dei coefficienti
 A
 $m \times n$

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE MATRICI

① Scambiare due righe i e k

Notazione: $R_i \longleftrightarrow R_k$

② Riscalarare una riga i per uno scalare $\lambda \neq 0$

Notazione: $R_i \longrightarrow \lambda R_i$

③ Sostituire una riga i per se stessa meno il riscalamento per λ di una riga k

Notazione: $R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_k$

Vogliamo usare queste operazioni su la matrice completa associata ad un sistema di equazioni in modo a risolverlo. Si osservi che operazione ① corrisponde allo scambio di ordine di due equazioni, operazione ② corrisponde al riscalamento di un'equazione e operazione ③ corrisponde alla sostituzione di un'equazione per se stesso sommata al riscalamento di un'altra — e nessuna di queste operazioni cambia l'insieme delle soluzioni del sistema!

Adesso vogliamo un algoritmo che ci permetta di eliminare "molte" entrate della matrice completa in modo a risolvere il sistema.

ALGORITMO DI ELIMINAZIONE GAUSSIANA

(d) Ripetiamo la procedura (a) a (c) per la matrice A' .

Dopo un numero finito di iterazioni arriviamo ad una matrice della forma

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & \dots & 1 & * & * & - & - & - & - & - & * \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & * & - & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

↳ FORMA RIDOTTA DELLA MATRICE

Formalmente, questo vuole dire che:

- Esiste un numero r fra 1 e m tale che:
 - le righe $R_1, R_2, \dots, R_r$ sono non-nulle
 - e le righe $R_{r+1}, \dots, R_m$ sono nulle.
 - Ogni riga $R_1, R_2, \dots, R_r$ ha per prima entrata non-nulla il numero 1 (detto il pivot della riga)
 - ogni riga $R_2, R_3, \dots, R_r$ ha un numero di zeri iniziali superiore al numero di zeri iniziale della riga precedente ("Scala")

Le colonne che contengono pivot sono dette dominanti, le altre sono dette libere.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{10}R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{34}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{34}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{22}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{5}{22}R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Forma ridotta}$$

colonne dominanti: $2^a, 4^a$ e 5^a
colonne libere: 1^a e 3^a