

13/01/2026

Algebra Lineare

1) Sistemi di equazioni lineari

Esempio

valori nutrizionali per porzione di cereali

	Cereale A	Cereale B
Proteine (g)	4	3
Carboidrati (g)	20	18
Grassi (g)	2	5

Quante porzioni di ogni cereale ci danno una colazione con 9 g di proteine, 48 g di carboidrati e 8 g di grassi?

incognite: $a = n^{\circ}$ porzioni Cereale A
 $b = n^{\circ}$ porzioni Cereale B

$$\begin{cases} \text{eq. proteine} \rightarrow 4a + 3b = 9 \\ \text{eq. carboidrati} \rightarrow 20a + 18b = 48 \\ \text{eq. grassi} \rightarrow 2a + 5b = 8 \end{cases}$$

Definizione 1.1 Un sistema lineare è un insieme di equazioni in n incognite che può essere scritto nel seguente modo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

a_{ij} = coefficiente della i -esima eq. e della j -esima incognita.

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le n incognite e a_{ij} (dove i varia fra 1 e m e j varia fra 1 e n) sono numeri reali o complessi, e $b_1, b_2, \dots, b_n$ sono numeri reali o complessi.

Una soluzione del sistema di equazioni lineari è una n -upla di numeri $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ di numeri reali o complessi per cui se sostituiamo x_1 per c_1 , x_2 per c_2 , $\dots$, x_n per c_n , otteniamo affermazioni vere in ogni equazione.

Esempio

$$\begin{cases} 4a + 3b = 9 \\ 20a + 18b = 48 \\ 2a + 5b = 8 \end{cases}$$

① Moltiplichiamo la prima equazione per $\frac{1}{4}$, e otteniamo un sistema di equazioni equivalente, cioè, un sistema che ha le stesse soluzioni:

$$\begin{cases} a + \frac{3}{4}b = \frac{9}{4} \\ 20a + 18b = 48 \\ 2a + 5b = 8 \end{cases}$$

② Sostituiamo la seconda equazione per la stessa meno 20 per la prima e sostituiamo la terza equazione

coeff. di a coeff. di b termini noti

coeff I eq. →

coeff. II eq. →

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

coeff III eq. → matrice completa del sistema di equazioni.

← riga 1
moltiplicare R_1 per $\frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

sostituiamo R_2 per $R_2 - 20R_1$

-2 per la prima equazione,
ottenendo comunque un sistema
equivalente

$$\begin{cases} a + \frac{3}{4}b = \frac{9}{4} \\ 18b - 15b = 3 \\ 5b - \frac{3}{2}b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ \frac{7}{2}b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

③ Moltiplichiamo la seconda
equazione per $\frac{1}{3}$ e la terza
equazione per $\frac{2}{7}$.

$$\begin{cases} a + \frac{3}{4}b = \frac{9}{4} \\ b = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

④ Sostituiamo la terza eq. per
se stessa meno la seconda

$$\begin{cases} a + \frac{3}{4}b = \frac{9}{4} \\ b = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

⑤ Sostituisco la prima equazione
per se stessa meno $\frac{3}{4}$ la seconda

$$\begin{cases} a = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

sostituiamo R_3 per
 $R_3 - 2R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/4 & 9/4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 7/2 & 7/2 \end{array} \right)$$

moltiplicare R_2 per $\frac{1}{3}$

moltiplicare R_3 per $\frac{2}{7}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/4 & 9/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sostituire R_3
per $R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/4 & 9/4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sostituisco R_1
per $R_1 - \frac{3}{4}R_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$