

12/01/2026

Campi vettoriali

Abbiamo studiato funzioni $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $\uparrow$
 $\mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$

Adesso, guarderemo le funzioni

$$F: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

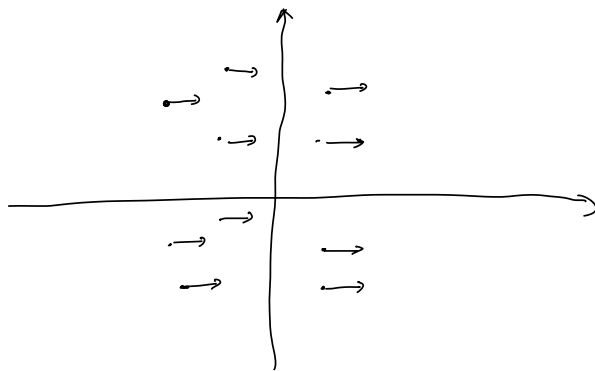
$\uparrow$
 $\mathbb{R}^2$

$$G: \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^3$

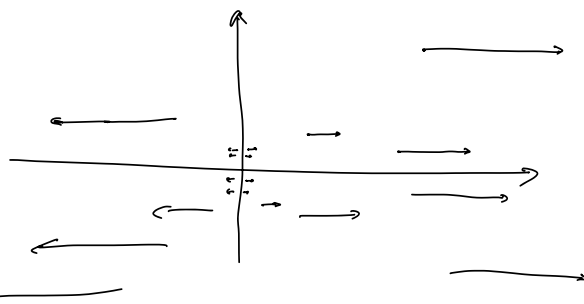
che si dicono campi vettoriali.

Esempio $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$ interpretazione visuale
 $(x, y) \longmapsto (1, 0)$



$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$(x, y) \longmapsto (x, 0)$



Esempio: Per ogni funzione $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, il vettore gradiente
è, infatti, un campo vettoriale:

$$\begin{aligned} \nabla f : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \nabla f(x, y) \end{aligned}$$

Domanda : Si consideri il seguente campo vettoriale :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (3x^2 - y, -3y^2 - x, 2z) \end{aligned}$$

F è vettore gradiente di una funzione
 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$?

Notazione : Se abbiamo un campo vettoriale

$$\begin{aligned} F : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \\ \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$(x, y) \longmapsto (F_x(x, y), F_y(x, y))$$

dove

$$\begin{aligned} F_x : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ F_y : D &\longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : \tilde{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \uparrow \\ \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$(x, y, z) \longmapsto (G_x(x, y, z), G_y(x, y, z), G_z(x, y, z))$$

$$G_x : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G_y : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G_z : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Esempio Prendendo l'esempio appena riportato

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 - y$$

$$F_y(x, y, z) = -3y^2 - x$$

$$F_z(x, y, z) = 2z$$

Definizione : Sia $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale e sia
 $G : \tilde{D} \xrightarrow{\uparrow \mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$ un altro campo vettoriale.

(1) La divergenza di F è

$$(\operatorname{div} F)(x, y) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(x, y)$$

ed è una funzione $\operatorname{div} F: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

(2) La divergenza di G è

$$(\operatorname{div} G)(x, y, z) = \frac{\partial G_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial G_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial G_z}{\partial z}(x, y, z)$$

ed è una funzione $\operatorname{div} G: \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

(3) Il rotore di G è un campo vettoriale

$\operatorname{rot} G: \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da:

$$(\operatorname{rot} G)(x, y, z) = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}, \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}, \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right)$$

Osservazione: Scriviamo $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot G &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (G_x, G_y, G_z) \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto} \\ \text{scalare}}}{=} \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = \operatorname{div} G. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times G &= \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}, -\left(\frac{\partial G_z}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial z} \right), \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto vettoriale}}}{=} \operatorname{rot} G. \end{aligned}$$

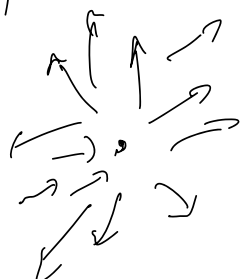
Ricordiamo il prodotto vettoriale $v \times w$, $v = (v_1, v_2, v_3)$
 $w = (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{array}{ccc} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$$

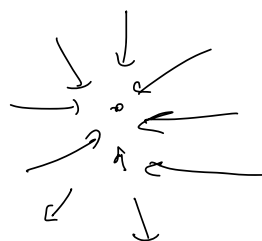
$$v \times w = (v_2 w_3 - w_2 v_3, -(v_1 w_3 - w_1 v_3), v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

intuizione sui concetti

Osservazione: La divergenza in un punto misura una media di convergenza o divergenza del campo vettoriale intorno a quel punto:



divergenza
positiva



divergenza
negativa

Il rotore di un campo misura a grosso modo una specie di momento angolare delle rotazioni dei vettori intorno ad un punto.

Esempio: Calcoliamo la divergenza e il rotore di

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (3x^2 - y, -3y^2 - x, zz)$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div} F)(x, y, z) &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
 &= 6x - 6y + 2
 \end{aligned}$$

$$(\operatorname{rot} F)(x, y, z) = (0 - 0, 0 - 0, -1 - (-1)) = (0, 0, 0)$$

i	j	k
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
F_x	F_y	F_z

Esempio: $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto (e^x, x+z, ye^z)$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div} F)(x, y, z) &= \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(x, y, z) \\
 &= e^x + 0 + ye^z = e^x + ye^z.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{rot} F)(x, y, z) &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\
 &= (e^z - 1, 0 - 0, 1 - 0) \\
 &= (e^z - 1, 0, 1)
 \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la divergenza e il rotore del vettore gradiente di una funzione

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

↑
Campo vettoriale!

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} \nabla f \right) (x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} \end{aligned}$$

↳ traccia della matrice Hessiana, cioè
Somma degli elementi della
diagonale.

Operatore detto Laplaciano — si scrive $\nabla^2 f$

$$(\operatorname{rot} \nabla f)(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right), \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = (0, 0, 0)$$

↓
per il teorema
di Schwarz.

Conclusione Se un campo vettoriale F è della forma $F = \nabla f$, allora $\text{rot } F = \vec{0}$.

In particolare, se $\text{rot } F \neq \vec{0}$, allora F non può essere gradiente di una funzione.

Esempio $F(x, y, z) = (3x^2 - y, -3y^2 - x, 2z)$

$\text{rot } F = (0, 0, 0)$. Dal criterio riportato

Si non possiamo concludere subito che F sia gradiente di una funzione; ma nemmeno escluderlo.

Infatti: $f(x, y, z) = x^3 - y^3 - xy + z^2$ ha la proprietà che $\nabla f = F$.

Definizione: Un campo vettoriale che è gradiente di una funzione con valori in $\mathbb{R}$ si dice conservativo.

Campo conservativo $\implies$ rotore nullo.