

08/01/2026

$$f: \begin{matrix} D \\ \cap \\ \mathbb{R}^2 \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textcircled{1} \quad \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Punti critici} \quad \nabla f(x, y) = (0, 0)$$

$$\textcircled{3} \quad H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

(Schwarz)

$\textcircled{4}$ Per ogni punto critico (a, b) in D

$$d = \det H(f)(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2$$

$$d < 0 \rightsquigarrow \text{punto di sella}$$

$$d > 0 \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \rightsquigarrow \text{minimo locale} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \rightsquigarrow \text{massimo locale} \end{cases}$$

$$d = 0 \rightsquigarrow \text{?????}$$

Se abbiamo però una funzione in più variabili, esiste un metodo analogo di classificazione dei punti critici

$$f: \begin{matrix} D \\ \cap \\ \mathbb{R}^n \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(n coordinate)
 $x_1, \dots, x_n$

$$\textcircled{1} \quad \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \nabla f(x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\textcircled{3} \quad H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

vale anche qui il teorema di Schwarz, e in tale caso
(seconde derivate parziali esistono e

sono continue) abbiamo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

↳ $H(f)(x_1, \dots, x_n)$ è simmetrica

"la diagonale è uno specchio"

④ $H(f)(a_1, \dots, a_n)$ per ogni punto critico $(a_1, \dots, a_n)$.

~> c'è una tecnica di classificazione dei punti critici analoga, però richiede più strumenti.

Esempio $f(x, y) = x^2 \ln y$ dominio: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

$$\nabla f(x, y) = \left(\underbrace{2x \ln y}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}, \underbrace{\frac{x^2}{y}}_{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} \right)$$

punti critici: $\nabla f(x, y) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ln y = 0 \\ \frac{x^2}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Otteniamo allora infiniti punti critici, tutti della forma $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}^+$

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \ln y & \frac{2x}{y} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}$$

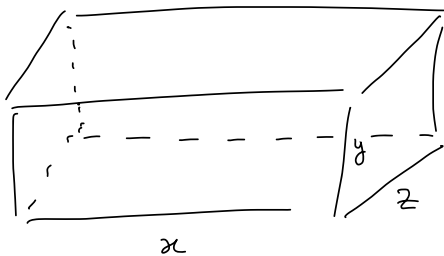
Valutiamo la matrice Hessiana nei punti critici

$$H(f)(0, y) = \begin{pmatrix} 2 \ln y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(0, y) = 0$$

~> non sappiamo la natura di questi punti critici

Esempio: Un'azienda vuole produrre scatole in forma di parallelepipedo rettangolo di volume 1000, però vuole minimizzare l'area della superficie del materiale da usare. Determinare le dimensioni di una tale scatola che minimizza l'area della superficie.



$$\text{Volume} = 1000$$

$$1000 = xyz \quad \leftarrow \text{information}$$

$$z = \frac{1000}{xy}$$

data

Dobbiamo scrivere una funzione che ci dia l'area della superficie di un tale parallelepipedo rettangolo in funzione delle misure x, y e z .

$$A(x, y, z) = 2xz + 2yz + 2xy$$

→ l'area della superficie per un volume 1000 viene data sostituendo z per $\frac{1000}{xy}$

$$\tilde{A}(x, y) = \frac{2x \cdot 1000}{xy} + \frac{2y \cdot 1000}{xy} + 2xy$$

$$\tilde{A}(x, y) = \frac{2000}{y} + \frac{2000}{x} + 2xy$$

$$\nabla \tilde{A}(x, y) = \left(-\frac{2000}{x^2} + 2y, -\frac{2000}{y^2} + 2x \right)$$

$$\nabla \tilde{A}(x, y) = (0, 0) \quad \begin{cases} -\frac{2000}{x^2} + 2y = 0 \\ -\frac{2000}{y^2} + 2x = 0 \end{cases} \quad (=\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2y = \frac{2000}{x^2} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1000}{x^2} \\ -\frac{2000}{\left(\frac{1000}{x^2}\right)^2} + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2000 x^4}{1000 \cdot 1000} + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2 x^4}{1000} + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \left(\frac{-2x^3}{1000} + 2 \right) = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

viene escluso perché
il volume dev'essere 1000
(e non zero).
inoltre $x=0$ non è permesso
nel dominio di $\tilde{A}$!

$$\frac{-2x^3}{1000} + 2 = 0$$

$$x^3 = 2 \cdot \frac{1000}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 1000$$

$$\Leftrightarrow x = 10$$

$$y = \frac{1000}{x^2} \rightsquigarrow y = \frac{1000}{100} = 10$$

Punto Critico : $(10, 10)$

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4000}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4000}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(10, 10) = \begin{pmatrix} \frac{4000}{10^3} & 2 \\ 2 & \frac{4000}{10^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(10, 10) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 > 0$$

Siccome $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(10, 10) = 4 > 0$, allora abbiamo un minimo,
Come volevamo!

Le dimensioni della scatola di area minima sono

$$x=10, \quad y=10 \quad z = \frac{1000}{10 \cdot 10} = 10$$

Quindi il cubo di lato 10 è il parallelepipedo rettangolo di volume 1000 che minimizza l'area della superficie!

Torniamo al foglio 3, esercizio 3

Trovare le direzioni di massima variazione positiva e negativa della funzione.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \quad P = (-1,1)$$

Ricordiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= v \cdot \nabla f(x,y) \\ &= \|v\| \|\nabla f(x,y)\| \cos \theta \end{aligned}$$

Se vogliamo determinare la direzione di massima variazione (sia positiva che negativa), possiamo supporre che $\|v\|=1$.
Avendo questa ipotesi

θ angolo fra v e $\nabla f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| \cos \theta$$

Siccome $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, il valore massimo di questa espressione accade quando $\cos \theta = 1$

e il valore minimo di questa espressione accade quando $\cos \theta = -1$.

Questo vuole dire che:

- Per avere $\frac{\partial f}{\partial s}(x,y)$ di valore massimo devo garantire che l'angolo θ fra $\mathbf{v}$ e $\nabla f(x,y)$ abbia $\cos \theta = 1$, cioè che $\theta = 0$. Allora la direzione di massima variazione positiva è proprio la direzione di $\nabla f(x,y)$.
- Per avere $\frac{\partial f}{\partial s}(x,y)$ di valore minimo devo garantire che l'angolo θ fra $\mathbf{v}$ e $\nabla f(x,y)$ abbia $\cos \theta = -1$, cioè che $\theta = \pi$. Allora la direzione di massima variazione negativa è proprio la direzione di $-\nabla f(x,y)$.

Tornando all'esercizio:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \quad P = (-1,1)$$

$$\nabla f(x,y) = (2x+y, x+2y)$$

$$\nabla f(-1,1) = (2 \cdot (-1) + 1, -1 + 2 \cdot 1) = (-1, 1)$$

La direzione di massima variazione positiva nel punto

P è $(-1, 1)$ e la direzione di massima variazione negativa nel punto P è $(1, -1)$

Quindi prendiamo $v = \nabla f(P)$ e calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = v \cdot \nabla f(P)$$

$$= (-1, 1) \cdot (-1, 1)$$

$$= 1 + 1 = 2 \leftarrow \text{Variazione massima positiva.}$$

Prendendo invece $w = -\nabla f(P)$, calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial w}(P) = w \cdot \nabla f(P) =$$

$$= (1, -1) \cdot (-1, 1) = -2$$