

07/01/2026

Buon anno nuovo!

$$f: D \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3} \mathbb{R}$$

Derivata direzionale (nella direzione v)

$$\frac{\partial f}{\partial v} \quad (= \nabla f \cdot v)$$

$\hookrightarrow$ vettore in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{lcl} \text{Se } v = (1, 0) & \rightsquigarrow & \frac{\partial f}{\partial x} \\ v = (0, 1) & \rightsquigarrow & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}} \right\} \text{ derivate parziali}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \text{ vettore gradiente.}$$

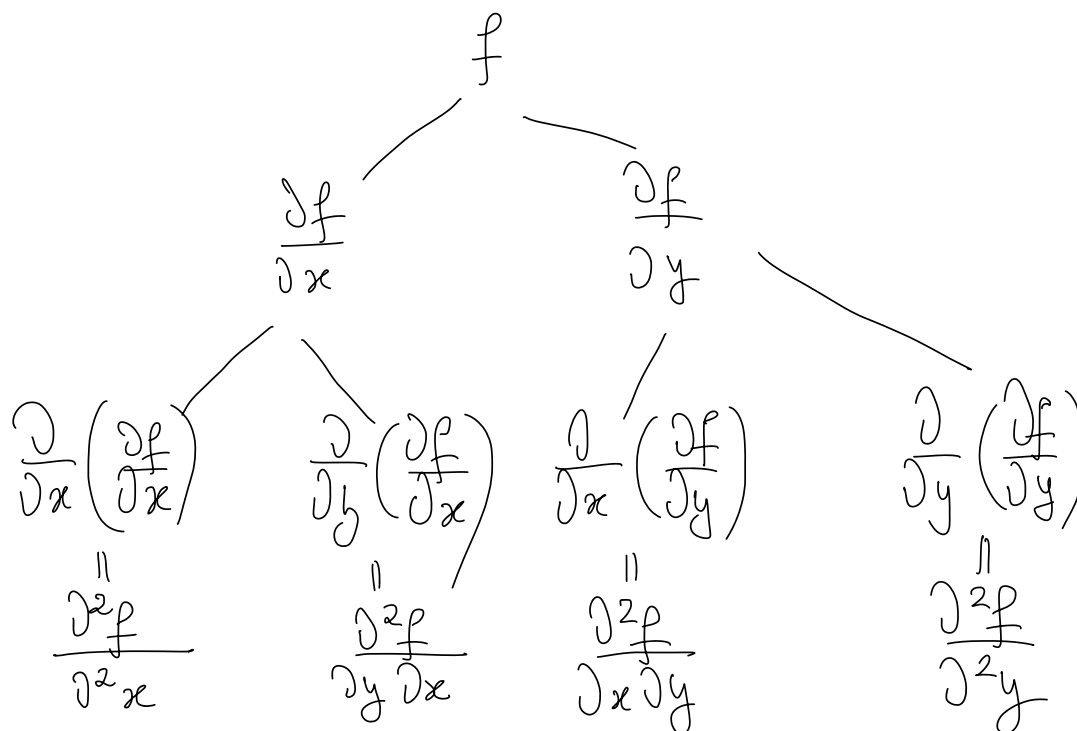
(direzione di massima variazione).

Ricordiamo che un punto (a, b) nel dominio D è detto punto critico (o stazionario) se $\nabla f(a, b) = (0, 0)$.

Come fare per trovare massimi o minimi locali della funzione f ? Si osservi che questi punti hanno piani tangenti al grafico di f orizzontali e quindi le derivate parziali si annullano. Questo vuole dire che massimi/minimi locali sono punti critici (ma ci possono essere anche altri punti critici!).

Per distinguere punti critici dobbiamo pensare alle

secondo derivate di f :



Teorema (Schwarz) Se f è tale che le seconde derivate parziali esistono e sono continue, allora

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$$

Organizziamo le seconde derivate parziali di f in una tabella 2×2 n° di righe n° di colonne

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

matrice Hessiana di f

Se f soddisfa il teorema di Schwarz allora la matrice Hessiana è simmetrica, cioè $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Esempio $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^3 - 5y$

$$\nabla f(x,y) = (x^2 - y^2, -2xy + 3y^2 - 5)$$

Punti critici : $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}(x,y) &= (-1,1) \checkmark \\(x,y) &= (1,-1) \checkmark \\(x,y) &= (\sqrt{5},\sqrt{5}) \checkmark \\(x,y) &= (-\sqrt{5},-\sqrt{5})\end{aligned}$$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x + 6y \end{pmatrix}$$

Valutando la matrice Hessiana nei punti critici, abbiamo:

$$H(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad H(f)(\sqrt{5},\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \quad H(f)(-\sqrt{5},-\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Un numero importante associato ad una matrice 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è il suo determinante:

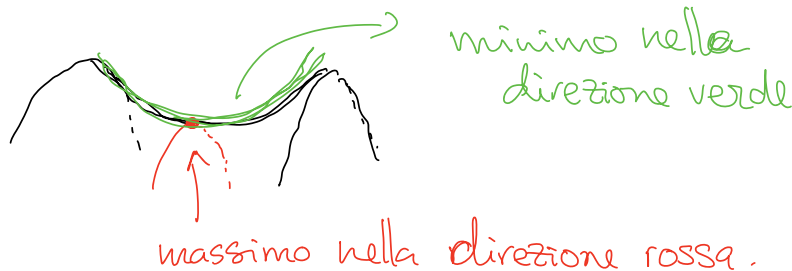
$$\boxed{\det A = ad - bc}$$

Se calcolo il determinante della matrice Hessiana $H(f)(x,y)$ ottengo :

$$\begin{aligned} \det H(f)(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}}_{\text{T. di Schwarz}} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

Teorema Sia f una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che le seconde derivate parziali esistono e sono continue. Per ogni punto critico (a,b) nel dominio D abbiamo :

(i) Se $\det H(f)(a,b) < 0$, allora (a,b) è un punto di sella, cioè massimo locale in una direzione e minimo locale in un'altra direzione.



(2) se $\det H(f)(a,b) > 0$ e

(a) se $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a,b) > 0$, allora (a,b) è
un minimo locale

(b) se $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a,b) < 0$, allora (a,b) è un
massimo locale.

[se $\det H(f)(a,b) = 0$, non sappiamo classificare il
punto critico!]

Torniamo all'esempio:

$$H(f)(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(1, -1) = 2 \cdot (-8) - 2 \cdot 2 \\ = -20 < 0$$

punto di sella.

$$H(f)(-1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(-1, 1) = (-2) \cdot 8 - (-2) \cdot (-2) = -20 < 0$$

punto di sella.

$$H(f)(\sqrt{5}, \sqrt{5}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} - (-2\sqrt{5})^2 \\ = 40 - 20 = 20 > 0$$

Siccome $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} > 0$, allora abbiamo
che $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ è un minimo locale

$$H(f)(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = 40 - 20 = 20 > 0$$

Siccome $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}) < 0$, allora abbiamo che $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ è un massimo locale.

Esercizio $f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$

calcolare i punti critici e classificarli in punti di sella, massimi o minimi locali.

① calcolare il vettore gradiente:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, -3y^2 + x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

② calcolare i punti critici

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3y^2)^2 + y = 0 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27y^4 + y = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(27y^3 + 1) = 0 \\ \end{cases}$$

Se $y=0$ allora $x=0$ e quindi $(0,0)$ è punto critico.

Se $y \neq 0$, allora $27y^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^3 = -\frac{1}{27} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \leadsto x = \frac{1}{3}$ e quindi $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ è un punto critico.

③ calcolare la matrice Hessiana

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -6y \end{pmatrix}$$

④ valutare matrice Hessiana nei punti critici e classificare i punti

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H(f)(0,0) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$$

e allora $(0,0)$ è un punto di sella.

$$H(f)\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det H(f)\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 3 > 0$$

Si come $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2 > 0$, allora abbiamo che $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ è un minimo locale.