

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z^3 = 4i\bar{z}$$

Quante soluzioni distinte ha questa equazione?

(2,5 pts)

Sol. $z \in \mathbb{C}$

$$z^3 = 4i\bar{z}$$

Notiamo che se $z=0$ $0^3 = 4i\bar{0} = 4i \cdot 0 = 0$ verifico l'equazione

$\Rightarrow z=0$ è una soluzione.

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho = |z| \in \mathbb{R}$ $\rho > 0$

θ argomento



$$z^3 = (\rho e^{i\theta})^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$$

$$4i\bar{z} = 4i(\overline{\rho e^{i\theta}}) = 4\rho e^{-i\theta}$$

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 4\rho e^{-i\theta} = 4\rho e^{i\pi} e^{-i\theta} = 4\rho e^{i(\pi - \theta)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 4\rho & \text{essendo } \rho > 0 \\ 3\theta = \pi - \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = 4 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \end{cases}$$

Soluzioni $\{0, 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})} \text{ con } k=0,1,2,3\}$

in tutto abbiamo 5 radici distinte.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right. \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) ~~Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U , una base $\mathcal{B}_W$ di W , una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$ e una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?~~ (4 pts)

(b) ~~Determinare un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus W = \mathbb{R}^4$.~~

~~Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^4$.~~ (2 pts)

(c) ~~Determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U .~~ (1,5 pts)

Svolgimento:

2) $\mathbb{R}^4$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\dim U = 2$ $4 - 2 = 2$ $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\dim W = 2$
 w_1 w_2 $2w_1$ lin. indep. perché non multipli

$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Calcoliamo $U \cap W$

Sia $w \in W$ $w = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a+b \\ -a+3b \end{pmatrix}$ ricordiamo
 che $U: \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2a+b \\ a = 2a+b \end{cases}$ $a - 2a = b$ $b = -a$

$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a-a \\ -a-3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\begin{matrix} w_1 - w_2 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{matrix}$

$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim U \cap W = 1 \Rightarrow$ non sono in somma diretta perché $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$

$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$

$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim(U+W) = 3$
 $u_1 \neq \vec{0}$ $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$ $w_1 \notin \langle u_1, u_2 \rangle = U$ con eq. $\begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$ $1 \neq 2$

2° metodo costruite la matrice $\begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ w_1^t \\ w_2^t \end{pmatrix}$ riducele con Gauss

le righe non nulle messe in colonna sono una base di $U+W$.

b) $T \oplus W = \mathbb{R}^4$
 $2 + 2 = 4$

$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim T = 2 \quad \dim W = 2 \quad \text{e} \quad \dim(T+W) = 4 \Rightarrow T \cap W = \{ \vec{0} \}$

Determinare $S \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che

$S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim S = 2$
 $2 + 2 = 2 + 2 = 4$

$S + U$

$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$
 $\begin{matrix} a' & b' & c' & d' \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$
 e_3

$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$

$S + W$

$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$
 $\begin{matrix} a' & b' & c' & d' \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$
 e_4

$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ridurre con Gauss e anche $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$ imporre che abbiano rango 4.

c) $P_U(v)$ con $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
 u_1, u_2 essend $u_1 \cdot u_2 = 0$

$z_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ e $z_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

Determinare $\{z_1, z_2\}$ base ortonormale di U con G-S

$P_U(v) = (v \cdot z_1) z_1 + (v \cdot z_2) z_2$

$\{u_1, u_2\}$ metodo G-S

$z_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

calcoliamo $u_3 = u_2 - (u_2 \cdot z_1) z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$z_2 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_U \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{6}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_U + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U^\perp}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

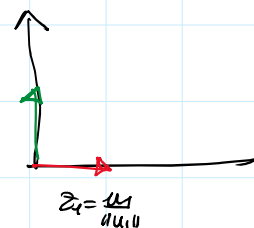
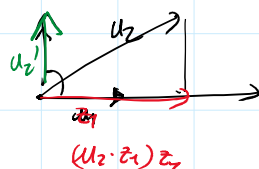
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G-S $\{u_1, u_2\}$

$$z_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2' = u_2 - (u_2 \cdot z_1) z_1$$

$$z_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$$



Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

i) Determinare la matrice M associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$. Determinare una base $B_{\text{Ker}(f)}$ di $\text{Ker}(f)$ e una base $B_{\text{Im}(f)}$ di $\text{Im}(f)$. L'applicazione f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? (3,5 pts)

ii) Determinare $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. (1 pts)

iii) Denotiamo con A la matrice ottenuta da M eliminando l'ultima colonna. Determinare il polinomio caratteristico di A . La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice invertibile H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}AH = D$. (2,5 pts)

iv) Si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Esiste un valore del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A sia simile alla matrice B_a ? Esiste un valore del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A sia ortogonalmente simile alla matrice B_a ? (1 pts)

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$M \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 4 \quad 4 \times 1$$

Certamente f non è iniettiva perché la dim del dominio è maggiore di quella del codominio, e certamente non è biiettiva.

$$\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad x_1 = x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ -x_4 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_4 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_3 = 3x_2 \\ -x_2 + 9x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$B_{\text{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \dim \text{Ker} f = 1$$

Formule delle dimensioni $f: V \rightarrow W \quad V = \mathbb{R}^4$

$$\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f \Rightarrow \begin{cases} \dim \text{Im} f = 3 \\ \text{Im} f \leq \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$4 = 1 + 3$$

$$B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \dim \text{Im} f = 3$$

essendo $\Rightarrow \text{Im} f = \mathbb{R}^3$
 $\Downarrow$
 f è suriettiva

b) $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Risolvere il sistema

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ -x_4 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_4 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_3 = 3x_2 - 2 \\ -x_2 + 9x_2 - 6 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_3 = 3x_2 - 2 \\ 8x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_3 = 3 - 2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ 1 \\ 1 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$x_4 = 0$ $\text{Ker} f$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \det(A - xI_3) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ -1 & 3-x & -1 \\ -1 & -1 & 3-x \end{pmatrix} = (2-x) \left| \begin{pmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{pmatrix} \right| = (2-x)(x^2 - 6x + 8) =$$

$$= (2-x)(x^2 - 6x + 8) = p_A(x)$$

Autorvalori $p_A(x) = 0$

$2-x=0 \Rightarrow x=2$

oppure $x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

Gli autovalori sono $d_1 = 2 \quad m_A(2) = 2$

$d_2 = 4 \quad m_A(4) = 1 = m_g(4)$

$$m_g(2) = \dim V_2 = \dim \ker(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - 2 = 1 \neq m_A(2)$$

Nu è diagonalizzabile.

Se fosse stata $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $m_A(2) = 2$
 $m_A(4) = 1 = m_g(4)$

$$m_g(2) = 3 - \operatorname{rg}(A' - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \quad A' \text{ è diag.}$$

$$V_2 = \ker(A' - 2I_3) \quad -x + y - z = 0 \quad y = x + z \quad \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_4 = \ker(A' - 4I_3) \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \quad V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Per quali $a \in \mathbb{R}$ $A \sim B_a = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $p_B(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & a & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m_A(2) = 2$

$m_A(4) = 1 = m_g(4)$

$= (2-x)^2(4-x)$

$$mg(2) \text{ per } Ba \quad mg(2) = 3 - rg(Ba - 2I_3) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3-1=2 & \text{se } a=0 \\ 3-2=1 & \text{se } a \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \neq 0 \text{ se } A \sim Ba$$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad s: \begin{cases} x - 5y = -12 \\ 2y - z = 6 \end{cases} \quad S = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

✗ Determinare la posizione reciproca fra r ed s e la loro distanza. (2 pts)

✗ Determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente s e passante per l'origine. (1 pts)

3. Determinare il punto T proiezione ortogonale del punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul piano $\sigma: 2x + z = 2$. Detta t la retta passante per i punti P e T determinare la proiezione ortogonale della retta t sul piano σ . (2 pts)

① $R \in r \quad \begin{pmatrix} -2+5a \\ a \\ -1+2a \end{pmatrix} \quad r \cap s \quad \begin{cases} -2+5a-5a=-12 & \text{imp.} \\ 2a-1-2a=6 \end{cases}$

$$r \cap s = \emptyset \Rightarrow \text{DISGIUNTE}$$

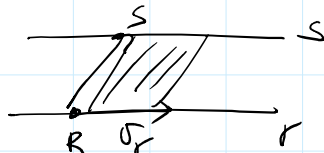
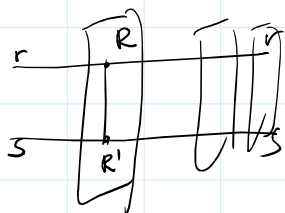
$$V_r = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_s: \begin{cases} x-5y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5y \\ z=2y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 5y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$V_s = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

essendo $V_r = V_s \Rightarrow r \parallel s$

Parallela disgiunte



$$R = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$d(r,s) = \frac{\| (S-R) \times \sigma_r \|}{\| \sigma_r \|} = \frac{\| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \|}{\sqrt{25+1+4}}$$

$$R = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in r$$

determiniamo $\pi \perp r$ passante per $R = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$5x + y + 2z = k$$

$$-10 + 0 - 2 = k$$

$$\pi: 5x + y + 2z = -12$$

determiniamo $R' = \pi \cap s$

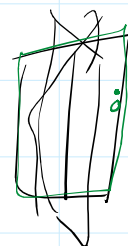
$$\begin{cases} x-5y=-12 \\ 2y-z=6 \\ 5x+y+2z=-12 \end{cases}$$

$$d(r,s) = d(R,R')$$

b) $s: \begin{cases} x-5y=-12 \\ 2y-z=6 \end{cases}$
 $\begin{cases} x-5y+12=0 \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$

Fascio di piani di sostegno s

$$\pi_{\alpha,\beta}: \alpha(x-5y+12) + \beta(2y-z-6) = 0$$

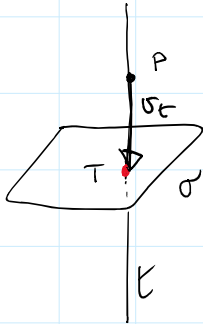


$$2(0-0+12) + 3(0-0-6) = 0 \quad 12 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 0$$

$$\boxed{\beta = 2\alpha} \quad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{matrix}$$

$$\pi_{1,2}: x - 5y + \cancel{4z} = 0$$

$$\pi: X - Y - 2Z = 0$$



$$\boxed{P_\sigma(t) = \{T\}}$$

$$T = t \cap \sigma$$

t retta passante per $P \perp \sigma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma: 2x + z = 2 \\ t: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\sigma_t} \end{array} \right.$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vee \sigma: 2x + z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2+2a \\ 1 \\ 3+a \end{pmatrix} \in t$$

appartiene a σ

se esol x

$$\underline{4} + \underline{4a} + \underline{3} + \underline{a} = 2$$

$$5a = -5$$

$$a = -1$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$