

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio

$$U = \langle (1, -1, 0), (0, 1, -1) \rangle.$$

- (a) Determinare una base ortonormale di U e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
- (b) Determinare un vettore v di norma 3 tale che $p_U(v) = (1, -2, 1)$, dove $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota la proiezione ortogonale sul sottospazio U .
- (c) Determinare tutti i sottospazi W di $\mathbb{R}^3$ tali che si abbia:

$$\dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad p_U(W) = \langle (1, -2, 1) \rangle.$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino la retta

$$r_a : \begin{cases} -x + y + z = 1 - 2a \\ -2ax + y + 2z = 2a(1 - 2a) \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, e la retta

$$s = (1, 0, 0) + \langle (1, 2, -1) \rangle.$$

- (a) Determinare una forma parametrica della retta r_a ed una forma cartesiana della retta s .
- (b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca delle rette r_a e s .
- (c) Determinare la distanza tra la retta r_0 e la retta s .
- (d) Determinare una retta t che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia complanare alla retta r_a .

- (6) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} y - z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

e la retta $s = (-1, 2, 0) + \langle (8, -4, -4) \rangle$

- (a) Trovare una forma parametrica di r ed una forma cartesiana di s .
- (b) Determinare posizione reciproca e distanza tra r e s .
- (c) Determinare un piano π contenente s e tale che la distanza tra r e π sia uguale alla distanza tra r e s .

Esercizio 7. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (1, 0, 1) + \langle (2, 1, 1), (1, 1, 0) \rangle, \quad \pi_2 : x + y - 2z = 2$$

- (a) Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r contenuta in tutti i piani del fascio di piani generato da π_1 e π_2 .
- (b) Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π appartenente al fascio generato da π_1 e π_2 , e parallelo alla retta $s = (1, 0, 0) + \langle (3, 0, 1) \rangle$
- (c) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta $t = (0, 1, 0) + \langle (1, 1, 1) \rangle$.

$$a) \quad \pi: \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = z \\ x = 1 - z - z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1-2z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\delta: \begin{cases} x = -1 + 8a \\ y = 2 - 4a \\ z = -4a \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 - 2z \\ y = 2 + z \end{cases} \Rightarrow \delta: \begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = -\frac{z}{4}$$

$$b) \quad \pi \text{ ed } \delta \text{ sono parallele distinte perché } \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi \quad \begin{pmatrix} -1+2+0 \neq 0 \\ -1+2+0 = 1 \end{pmatrix}$$

per determinare la distanza tra π ed δ cerchiamo un piano ortogonale ad entrambe le rette.

$$\text{es. } \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle^\perp \Rightarrow 2x - y - z - 2 = 0$$

$$\text{troviamo i punti } P_1 = \pi \cap \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } P_2 = \pi \cap \delta$$

$$2(-1 + 8a) - (2 - 4a) - (-4a) - 2 = 0 \Rightarrow -6 + 24a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} -1 + \frac{8}{4} \\ 2 - \frac{4}{4} \\ -\frac{4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

calcoliamo la distanza tra P_1 e P_2

$$\text{dist}(\pi, \delta) = \text{dist}(P_1, P_2) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

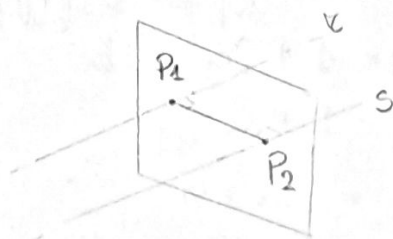
$$c) \quad \delta \subset \pi \wedge \text{dist}(\pi, \pi) = \text{dist}(\pi, \delta) \Rightarrow \pi \parallel \delta \text{ e } \pi \parallel r$$

$$\Rightarrow \text{dist}(\pi, \pi) = \text{dist}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi\right), \text{ per avere } \text{dist}(\pi, \pi) = \text{dist}(\pi, \delta) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ deve essere ortogonale a } \pi \Rightarrow \pi: y - z + d = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi \Rightarrow d = -2$$

$$\Rightarrow \pi: y - z - 2 = 0$$



$$a) \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \pi_2: x+y-2z=2$$

$$\pi = \pi_1 \cap \pi_2 \quad \rightarrow \text{cerco eq cartesiana } \pi_1: ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad d = 1 \cdot 1 - 0 - 1 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \pi_1: x - y - z = 0$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ risolvo il sistema

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & +1 & -2 & 2 \end{array} \xrightarrow{II-I} \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & +2 & -1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2y - 2 \\ x = y + 2y - 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3y-2 \\ y \\ 2y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$b) \pi \in \pi \quad e \quad \pi \parallel s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 3a + 3b \\ y = 1 + a \\ z = 2a + b \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 3y - 3 + 3b \rightarrow x = -2 + 3y + 3z - 6y + 6 \\ a = y - 1 \\ z = 2y - 2 + b \rightarrow b = z - 2y + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi: x + 3y - 3z = 4$$

$$c) t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in x+y-2z=0 \quad \Rightarrow t \parallel \pi_2$$

$$\text{dist}(t, \pi_2) = \text{dist}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi_2\right) = \frac{|1-2|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

a) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ortormalizziamo:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{una base ortormale di } U \text{ è } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

inoltre $U^\perp : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \quad U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Rightarrow \text{Una base ortormale di } \mathbb{R}^3 \text{ è } : \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $P_U^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -2+\alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -2+\alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix} \right\| = 3 = \sqrt{(1+\alpha)^2 + (-2+\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}$$

$$2 + 2\alpha^2 + \cancel{4\alpha} + 4 + \alpha^2 - \cancel{4\alpha} = 9 \Rightarrow 3\alpha^2 + 6 = 9 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $\exists!$ sottospazio W t.c. $\dim(W) = 2$ e $P_U(W) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ESERCIZIO 5

a) Risolve il sistema che definisce π_a :

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-2a \\ -2a & 1 & 2 & 2a(1-2a) \end{array}$$

$$\xrightarrow{II-2aI} \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-2a \\ 0 & 1-2a & 2-2a & 0 \end{array}$$

$$a \neq \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x = y + 1 - y \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2a-1 + y + 1 \\ y(1-2a) + 2(2-2a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_a = \begin{pmatrix} 2a-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2a \\ 2a-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} y = -1 \frac{(2-2a)}{(1-2a)} \quad a \neq \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x = 2a-1 + \frac{2-2a}{2a-1} \cdot 1 + 1 = 2a-1 + \frac{-2a+2+2a-1}{2a-1} \cdot 1 = 2a-1 + \frac{1}{2a-1} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta: \begin{cases} x = 1+x \\ y = 2x \\ z = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x+1 = 1 \\ y+2x = 0 \end{cases}$$

$$b) \pi_a = \begin{pmatrix} 2a-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2a \\ 2a-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\pi_a \text{ e } S \text{ sono } // \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2-2a = 2 \\ 2a-1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{per } a = 0 \text{ e disgiunte } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$$

$$\text{inoltre } \pi_a \text{ e } S \text{ sono complanari } \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2-2a & 2a-1 \\ 2a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \pi_a \text{ e } S \text{ sono complanari } \Leftrightarrow 2a-2(2(2a-1)+2-2a) = 0 \\ (2a-2)(2a) = 0 \Rightarrow \text{per } a = 0, 1$$

In conclusione:

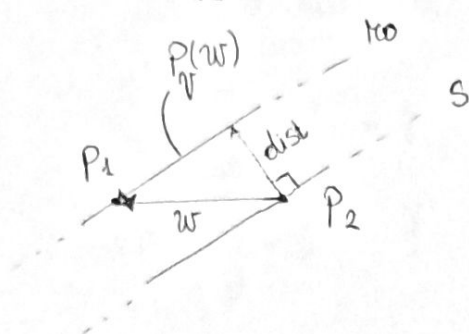
$\pi_0 // S$ e disgiunte (infatti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$)

π_1 incidente con S

π_a è sghemba con S per $a \neq 0, 1$

$$c) \pi_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_1} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_v$$

$$s = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_2} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_v$$



$$w = P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_v(w) + \text{dist}(\pi_0, s) = w$$

$$\Rightarrow \text{dist}(\pi_0, s) = \|w - P_v(w)\|$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{30}}{3} \end{aligned}$$

$$d) t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in forma cartesiana $t: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

infatti $\det \begin{pmatrix} 1 & 2-2a & 2a-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO

Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Determinare la forma parametrica di r e una forma cartesiana di s
- Determinare la posizione reciproca di r e s e la distanza tra r e s
- Determinare una retta t incidente sia in r che s e di vettore direttore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) risolviamo il sistema che definisce r :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & +1 & -1 & 7 \end{array} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x = 4 + z + y = \frac{11}{3} + \frac{2}{3}z \\ y = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} + \frac{2}{3}z \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

per semplicità riscriviamo la soluzione particolare:

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Equazione di r $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

eliminando il parametro a dalla forma parametrica di s :

$$\begin{cases} x = -1 + a \\ y = 2 + a \\ z = 4 + 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = x + 1 \\ y = 2 + x + 1 \\ z = 4 + 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - z = -6 \end{cases}$$

b) Si ha

$$r = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_P + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{v_1} \quad \text{e} \quad s = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_Q + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{v_2}$$

v_1 e v_2 sono l.i. $\Rightarrow$ r e s non sono parallele

inoltre:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|(P-Q) \cdot (v_1 \times v_2)|}{\|v_1 \times v_2\|}$$

$$= \frac{|(4, -2, -5) \cdot (-5, -1, 3)|}{\|(-5, -1, 3)\|}$$

$$= \frac{-33}{\sqrt{35}} \neq 0$$

$\Rightarrow$ r e s sono sghembe!

c) poiché t è incidente sia a r che a $s \Rightarrow t$ deve essere contenuta a r e s

- consideriamo π_1 contenente r e con seconda direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
- consideriamo π_2 contenente t e con seconda direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow t = \pi_1 \cap \pi_2$$

determiniamo le equazioni di π_1 e π_2

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1: 2x + 7y + z + d_1 = 0$$

$$\pi_2: -2x + 4y - z + d_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \pi_1 \Rightarrow 2(3) + 7(0) + (-1) + d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = -5$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi_2 \Rightarrow -2(-1) + 4(2) - (4) + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = -6$$

$$\pi_1: 2x + 7y + z - 5 = 0$$

$$\pi_2: -2x + 4y - z - 6 = 0$$

$$\Rightarrow t: \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -1 & 6 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{II} + \text{I}}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = (5 - 1 - 7y)\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = (-2 - 1)\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ESERCIZIO

Nello spazio euclideo usuale si consideri la retta $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ed il piano $\pi_\alpha: x + (\alpha+1)y + \alpha z - 1 = 0$ dipendente da $\alpha \in \mathbb{R}$

- Determinare una forma cartesiana di r , e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ una forma parametrica di π_α
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ determinare la posizione reciproca di r e π_α
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ determinare la distanza di r da π_α
- Determinare l'intersezione di tutti i piani π_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

a) una forma cartesiana di r è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + a \\ z = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + z \\ a = z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

una forma parametrica di Π_α è

$$\begin{cases} x = -(\alpha+1)y - \alpha z + 1 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -(\alpha+1)y - \alpha z + 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-y) \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -(\alpha+1) \cdot (-1) + \alpha(+1) = 2\alpha + 1$$

$$\text{se } 2\alpha + 1 = 0, \text{ quindi per } \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow r$ e Π_α sono paralleli

$$\text{ora vediamo se } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi_{-\frac{1}{2}} : 0 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 - 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ per $\alpha = -\frac{1}{2}$ r e Π_α sono paralleli disgiunti!

invece se $2\alpha + 1 \neq 0$ significa che i 3 vettori sono l.u.
indipendenti $\Rightarrow r$ e Π_α sono incidenti!

c) per $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ si ha $\text{dist}(\pi, \pi_\alpha) = 0$ (incidenti)

per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ha $\text{dis}(\pi, \pi_\alpha) = \text{dis}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi_{-\frac{1}{2}}\right)$

$$\text{distanza punto-piano} : d(P, \pi) = \frac{|aP_1 + bP_2 + cP_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{è un vettore parallelo a } \pi_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ la retta $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ giace in ogni piano π_α e poiché i piani π_α sono distinti, l'intersezione comune con questa retta

ESERCIZIO

Siano $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} +4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ punti dello spazio affine A^3

a) dimostrare che esiste un unico piano π passante per tali 3 punti e determinare le equazioni parametrica e cartesiana di tale piano.

b) determinare le eq. parametriche e cartesiane dei piani π_1 e π_2 paralleli a π e distanti $\sqrt{35}$ da esso.

c) determinare le eq. cartesiane e parametriche di una retta s parallela a π_1 e π_2 , equidistante da questi due piani e ortogonale al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) l'unico piano π passante per P_1, P_2, P_3 ha forma parametrica:

$$\pi = P_1 + \langle P_2 - P_1, P_3 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

troviamo un'equazione di π : $(1, -1, 2) \times (3, 0, 1) = (-1, 5, 3)$

$$\text{allora } \pi : -x + 5y + 3z + d = 0$$

$$\text{imponendo } P \in \pi \Rightarrow \pi : -x + 5y + 3z - 4 = 0$$

b) un piano π' parallelo a π avrà stessa giacitura $\Rightarrow$

$$\pi': -x + 5y + 3z + d = 0 \quad \text{con } d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Inoltre } \text{dist}(\pi, \pi') = \text{dist}(P, \pi') = \frac{|4 + d|}{\sqrt{35}} = \sqrt{35}$$

$$\Rightarrow |4 + d| = 35 \Rightarrow 4 + d = \pm 35 \Rightarrow d = \begin{cases} +31 \\ -39 \end{cases}$$

$$\pi_1: -x + 5y + 3z - 39 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: -x + 5y + 3z + 31 = 0$$

c) Sia $\pi = P + \langle w \rangle$

w deve essere ortogonale a $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}$ e a $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_2}$ da esercizio ortogonale alla normale del piano (l'esercizio chiede che la retta sia // a π_1, π_2)

$$\Rightarrow \langle w \rangle = \langle v_1 \times v_2 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

inoltre P deve essere tale che $\text{dist}(P, \pi_1) = \text{dist}(P, \pi_2)$

$\Rightarrow$ si può prendere un qualsiasi punto $P \in \pi$

ad esempio $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 1 - 4a \\ z = 7a \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{7} \\ y = 1 - \frac{4}{7} \\ a = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{cases} 7x - z = 7 \\ 7y + 4z = 7 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (1, 0, 1) + \langle (2, -1, 1), (-1, 1, 0) \rangle, \quad \pi_2 : 3x + y - 2z = 2$$

- (i) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1 .
- (ii) Determinare il piano π passante per il punto $(1, 2, 0)$ ed ortogonale ai piani π_1 e π_2 .
- (iii) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta t definita dalle equazioni $x + y = 1$ e $y + z = 1$.

ESERCIZIO 5.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\pi_2: 3x + y - 2z = 2$$

i) per la forma parametrica di π_2 risolvo il sistema che lo definisce:

$$y = 2 + 2z - 3x \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2 - 3x + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

forma cartesiana di π_1 :

1^a metodo

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1 + 2a - b \\ y = -a + b \\ z = 1 + a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2z - 2 - b \\ y = -z + 1 + b \\ a = z - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} b = -1 + 2z - x \\ y = -z + 1 - 1 + 2z - x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi_1: x + y - z = 0$$

2^a metodo

$$\rightarrow \text{calcolo } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi_1: -x - y + z + d = 0 \quad \text{inoltre } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \pi_1 \Rightarrow \text{ricavo } d$$

$$-1 + 0 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$\Rightarrow \pi_1: -x - y + z = 0 \quad \checkmark$$

$$ii) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi \quad \wedge \quad \pi \perp \pi_1, \pi_2 \quad \pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{imponendo } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi \quad 1 + 2 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$\Rightarrow \pi = x + y + 2z - 3 = 0$$

$$\text{oppure } \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{iii)} \quad t : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \pi_2 : 3x + y - 2z = 2$$

$$t : \begin{cases} y = 1 - x \\ x = 1 - 1 + z \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

consideriamo la giacitura di $\pi_2 : 3x + y - 2z = 0$

vediamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in 3x + y - 2z = 0 \Rightarrow \pi_2 \parallel t$

vediamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \pi_2 \Rightarrow \pi_2$ non contiene t

$$\text{dist}(t, \pi_2) = \text{dist}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi_2\right) = \frac{|1-2|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$