

18/12/2025

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ o } D \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + hv) - f(a,b)}{h} \quad \text{derivata direzionale}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial (1,0)}(a,b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial (0,1)}(a,b) \quad \text{derivate parziali}$$

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right) \quad \text{vettore gradiente}$$

Teorema Sia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$ o $D \subseteq \mathbb{R}^3$) una funzione. Supponiamo che le derivate parziali di f esistono e sono continue. Allora per ogni punto (a,b) nel dominio D e per ogni vettore v in $\mathbb{R}^2$ abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a,b) = v \cdot \nabla f(a,b)$$

Dimostrazione omessa.

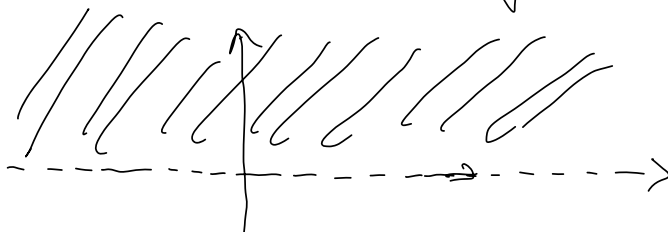
Esercizio: $f: D \longrightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^2 \ln y$$

- Si determini il dominio D della funzione f .
- Si determini l'espressione delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ in ogni punto (a,b) del dominio

c) Si calcoli $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\nabla = (-1,3)$, per ogni punto (a,b) nel dominio.

a) dominio: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y > 0$



$$\begin{aligned}
 b) \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + h(1,0)) - f(a,b)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 \ln b - a^2 \ln b}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln b \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln b \frac{\cancel{a^2} + 2a\cancel{h} + \cancel{h^2} - \cancel{a^2}}{\cancel{h}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln b (2a + h) = 2a \ln b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + h(0,1)) - f(a,b)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 \ln(b+h) - a^2 \ln(b)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} a^2 \frac{\ln(b+h) - \ln(b)}{h}$$

$$= a^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b+h) - \ln(b)}{h}$$

derivata del logaritmo
nel punto b
per definizione di derivata!

$$= a^2 \cdot \frac{1}{b} = \frac{a^2}{b}$$

$$\nabla f(a, b) = \left(2a \ln b, \frac{a^2}{b} \right)$$

c) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$

$\mathbf{v} = (-1, 3)$

Siccome le derivate parziali sono continue in tutti punti del dominio, abbiamo dal teorema che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a, b) &= (-1, 3) \cdot \left(2a \ln b, \frac{a^2}{b} \right) \\ &= -2a \ln b + \frac{3a^2}{b} \end{aligned}$$

Si osservi che nel calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ stiamo fissando y come costante, facendo variare soltanto x .
Per cui, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ può essere calcolata usando

le regole di derivazione in una variabile (x), interpretando y come costante.

Invece, per calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ uso lo stesso ragionamento tenendo questa volta x come costante e y come variabile.

Esempi: $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$

$$g(x, y) = x^2y - 2x^2 - 3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2xy - 4x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^2$$

-
- Che informazione ci dà il vettore gradiente in un punto del dominio?

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) &= v \cdot \nabla f(x, y) \\ &= \|v\| \|\nabla f(x, y)\| \cos \theta \end{aligned}$$

$\swarrow$ angolo fra v e ∇f

Siccome vogliamo studiare la tassa di variazione della funzione f in direzione v possiamo supporre che v ha lunghezza 1, cioè $\|v\| = 1$. In tale caso

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| \cos \theta$$

$$\leadsto \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x,y) \right| = \|\nabla f(x,y)\| \underbrace{|\cos \theta|}_{\text{prende valore fra 0 e 1.}}$$

Per massimizzare il valore di $\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x,y) \right|$ dobbiamo avere $|\cos \theta| = 1$, cioè angolo $\theta = 0$, quindi v deve puntare nella stessa direzione di ∇f . Quindi il gradiente punta nella direzione di massima variazione della funzione f !

Esempio $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^3 - 5y$

Calcolare la direzione di massima variazione nel punto $(0,0)$ e la rispettiva derivata direzionale nel punto $(0,0)$.

Calcoliamo il vettore gradiente

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \\ &= (x^2 - y^2, -2xy + 3y^2 - 5) \end{aligned}$$

$$\nabla f(0,0) = \underbrace{(0, -5)}_{\mathbf{0}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{0}}(0,0) &= \mathbf{0} \cdot \nabla f(0,0) \\ &= (0, -5) \cdot (0, -5) = 25 \end{aligned}$$

Ricordiamo che nelle funzioni di una variabile la retta tangente al grafico di f nel punto $x=a$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Per le funzioni in due variabili possiamo calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f .

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

piano tangente al grafico di f nel punto (a,b) .

Da queste due osservazioni possiamo dedurre che nei punti di massimo o minimo della funzione f , il vettore gradiente si deve annullare. Questo è perché il piano tangente

al grafico di f dev'essere orizzontale (quindi della forma $z=c$) e dall'altra parte la tasso di variazione della funzione in qualunque direzione dev'essere zero.

Definizione: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Un punto (a,b) in D si dice critico o stazionario se $\nabla f(a,b) = (0,0)$, cioè se $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Esempio: Calcolare punti critici di

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^3 - 5y$$

Abbiamo già calcolato $\nabla f(x,y) = (x^2 - y^2, -2xy + 3y^2 - 5)$

Per calcolare i punti critici, risolvo

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ -2xy + 3y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

"0"

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x = y} \vee x = -y \end{cases}$$

Adesso abbiamo due casi:

Caso 1: $x = y$; sostituendo y per x nella

seconda equazione otteniamo

$$-2x^2 + 3x^2 - 5 = 0$$

$$\leadsto x = \pm\sqrt{5}$$

Quindi in questo caso ci sono 2 punti critici
 $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

Caso 2 : $y = -x$; Sostituendo y per $-x$
nella seconda equazione, otteniamo

$$2x^2 + 3x^2 - 5 = 0$$

$$\leadsto x = \pm 1$$

Quindi in questo caso ci sono 2 punti critici
 $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.

Allora i punti critici di f sono $(\sqrt{5}, \sqrt{5}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$
 $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.