

17/12/2025

## Una introduzione alle funzioni in varie variabili

Fino ad adesso abbiamo guardato / studiato funzioni in una sola variabile, cioè,  $f: \underline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  e la regola della funzione viene scritta come  $f(x)$ .  
*dominio contenuto in  $\mathbb{R}$*

Adesso studieremo funzioni  $f: \underline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  e quindi la regola della funzione viene scritta  $f(x, y)$  oppure  $f(x, y, z)$ .  
*dominio contenuto in  $\mathbb{R}^2$  o in  $\mathbb{R}^3$*

Esempio  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$   $f(1, 2) = \frac{1 \cdot 2}{1^2 + 2^2} = \frac{2}{5}$

dominio? Chiaramente  $(0, 0)$  non appartiene al dominio di  $f$ .

Deve verificare quali sono le coppie di numeri  $(x, y)$  per cui  $x^2 + y^2 = 0$  ed escluderle di  $\mathbb{R}^2$  per ottenere il dominio.

$\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 0} = 0$  e allora per avere  $x^2 + y^2 = 0$  devo avere  $x = 0$  e  $y = 0$ .

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$   
 $\downarrow$   
*tranne*

Cosa sarebbe il grafico di  $f$ ?

il grafico di  $f$  è l'insieme di punti in  $\mathbb{R}^3$   
 $(x, y, z)$  per cui  $z = f(x, y)$

In generale il grafico di una funzione in 2 variabili è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ , mentre il grafico di una funzione in 3 variabili è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^4$ .

I punti del grafico sono della forma

$$(x, y, f(x, y)) \quad \text{e} \quad (x, y, z, f(x, y, z))$$

Ci chiediamo come calcolare limiti per queste funzioni? Infatti, avremo limiti direzionali, cioè, limite di  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  si avvicina di un punto  $(a, b)$  nella direzione  $\mathbf{v}$  (vettore in  $\mathbb{R}^2$ ).

Esempio  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ?$$

Vediamo cosa succede se mi avvicino da  $(0, 0)$  lungo una retta del tipo  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx}} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m}{x^2 (1 + m^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} \end{aligned}$$

Conclusione:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  non esiste poiché ogni limite direzionale ci dà un numero diverso!



$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  esiste se e solo se tutti i limiti direzionali

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) = (a,b) + t v}} f(x,y)$$

limite direzionale lungo la retta di equazione parametrica  $(x,y) = (a,b) + t v$ ,  $v$  vettore in  $\mathbb{R}^2$

esistono e sono uguali.

Osservazione: il limite direzionale si riduce ad un limite in una sola variabile.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) = (a,b) + t(v_1, v_2)}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \begin{cases} x = a + t v_1 \\ y = b + t v_2 \end{cases}}} f(x,y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} f(a + t v_1, b + t v_2) \end{aligned}$$

Tale come nel caso di funzioni in una variabile si può parlare di Continuità per le funzioni in varie variabili.

Una funzione  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è continua in

un punto  $(a,b)$  del suo dominio se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  esiste e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ .

Una tale funzione si dice continua se è continua in tutti punti del suo dominio.

Nello stesso modo con cui si dimostra la continuità di tante funzioni in una variabile, si dimostra anche che funzioni polinomiali, trigonometriche, logaritmiche, esponenziali, le loro somme/prodotti/quozienti in varie variabili sono continue.

Definizione (Derivata direzionale) Sia  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  (o anche  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ). Dato un punto  $(a,b)$  nel dominio  $D$  di  $f$  e dato un vettore  $v$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $v = (v_1, v_2)$ , la derivata direzionale di  $f$  in direzione  $v$  nel punto  $(a,b)$  è definita (se esiste) come

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a,b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((a,b) + hv) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv_1, b + hv_2) - f(a,b)}{h} \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$  è una funzione definita in tutti punti in cui  $f$  è derivabile lungo la direzione  $v$ .

Se  $v = (1,0)$ , allora scrivo  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  e se  $v = (0,1)$

scrivo  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  e queste funzioni sono dette le derivate parziali di  $f$ .

Il vettore gradiente di  $f$  è un vettore in  $\mathbb{R}^2$  dipendente da  $x$  e  $y$  che ha per coordinate le derivate parziali:

$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

La funzione  $f$  è detta derivabile se tutte le derivate direzionali in tutti punti del dominio esistono.

Esempio:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = x(y-2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h \cdot 1, 0+h \cdot 0) - f(0,0)}{h}$$

$$v = (1,0)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h \cdot 0, 0+h \cdot 1) - f(0,0)}{h}$$

$$v = (0,1) \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0-h, 0+3h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h, 3h) - f(0,0)}{h}$$

$$w = (-1,3)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(3h-2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -(3h-2) = 2$$

$$\nabla f(0,0) = (-2, 0)$$

↓  
derivata  
parziale  
 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ 
↖  
derivata  
parziale  
 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

Domanda : vediamo qualche legame fra il vettore  $\nabla f(0,0)$ ,  
 $v = (-1, 3)$  e  $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$  ?

$$\begin{array}{ccccc} (-2, 0) & \cdot & (-1, 3) & = & 2 \\ \nabla f(0,0) & & v & & \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \end{array}$$