MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

2° Compitino — 24 gennaio 2025

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

Soluzione.
Notiamo che la funzione è continua nell'intervallo $[1, +\infty)$ dunque l'integrale è generalizzato solo per $+\infty$. Per sostituzione ponendo $t = \frac{1}{x}$ abbiamo $dt = -\frac{1}{x^2}dx$; inoltre se $x = 1$ allora $t = 1$ mentre se x tende a $+\infty$ allora t tende a 0^+; quindi l'integrale diventa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{s\to 0} \int_1^s -e^t dt = \lim_{s\to 0}(e - e^s) = e - 1.$$

Esercizio 2. Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}.$$

(i) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea associata.

(ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data.

(iii) Tra tutte le soluzioni, determinare quella che soddisfa la condizione $y(1) = 0$.

Soluzione: (i)

$$\begin{aligned} y' + \frac{2}{x}y = 0 &\Rightarrow y' = -\frac{2}{x}y \\ &\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \\ &\Rightarrow \ln|y| = -2\ln|x| + c \\ &\Rightarrow y = \frac{c}{x^2}, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Con il metodo di variazione delle costanti, pongo $y = \frac{k(x)}{x^2}$; sostituendo nell'equadiff ottengo

$$\frac{k'(x)x^2 - 2xk(x)}{x^4} + \frac{2k(x)}{x^3} = \frac{e^x}{x} \Rightarrow k'(x) = xe^x \Rightarrow k(x) = \int xe^x dx.$$

L'integrale $\int xe^x dx$ si risolve per parti usando che $(e^x)' = e^x$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int (x)'e^x = xe^x - \int e^x = e^x(x-1).$$

Quindi la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$y(x) = \frac{e^x(x-1) + c}{x^2}$$

per $c \in \mathbb{R}$.
(iii) Ponendo $x = 1$ nella formula $y(x) = \frac{e^x(x-1)+c}{x^2}$ ottengo $y(1) = c$ quindi la condizione richiesta è verificata per $c = 0$ e la soluzione cercata è $y(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

Esercizio 3. Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y'' + 4y' + 3y = 3x.$$

(i) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata.

(ii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data.

(iii) Tra tutte le soluzioni, determinare quella che soddisfa le condizioni $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

Soluzione: (i) L'equazione omogenea associata è $y''+4y'+3y = 0$ e il suo polinomio caratteristico è $x^2 + 4x + 3$. Le radici del polinomio caratteristico sono $r_1 = -3$ e $r_2 = -1$, per cui abbiamo che la soluzione generale dell'equazione omogenea è $y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x}$, dove c_1 e c_2 sono costanti reali.

(ii) Usiamo il metodo della somiglianza. La funzione $f(x) = 3x$ è un polinomio di grado 1. Siccome 0 (esponente dell'esponenziale nascosta nella funzione f) non è radice del polinomio caratterisco, cerco allora una soluzione particolare che sia un polinomio di grado 1, cioè della forma $y_p(x) = ax + b$, dove a e b sono numeri reali. Chiaramente si ha $y_p'(x) = a$ e $y_p''(x) = 0$ per una tale soluzione particolare, per cui sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$0 + 4a + 3(ax + b) = 3x.$$

Adesso, due polinomi sono uguali se e solo se tutti coefficienti di tutte potenze di x sono uguali. Si ottiene allora un sistema di equazioni a due incognite

$$\begin{cases} 4a + 3b = 0 \\ 3a = 3 \end{cases}$$

da cui si conclude che $a = 1$ e $b = -\frac{4}{3}$. In altre parole, abbiamo $y_p(x) = x-\frac{4}{3}$ soluzione particolare dell'equazione. Per fine, la soluzione generale dell'equazione differenziale si ottiene sommando questa soluzione particolare alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata. In altre parole, tutte le soluzioni dell'equazione sono della forma

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x} + x - \frac{3}{4}.$$

(iii) Calcoliamo per prima y'.

$$y'(x) = -3c_1e^{-3x} - c_2e^{-x} + 1$$

Chiaramente valutando questa funzione in $x = 0$, otteniamo $y'(0) = -3c_1 - c_2 + 1$, e sappiamo già che $y(0) = c_1 + c_2 - \frac{4}{3}$. Per rispondere alla domanda dobbiamo allora risolvere un sistema di equazioni della forma

$$\begin{cases} -3c_1 - c_2 + 1 = -1 \\ c_1 + c_2 - \frac{4}{3} = 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene che $c_2 = 2 - 3c_1$ e quindi dalla seconda equazione otteniamo $-2c_1 = 1 + \frac{4}{3} - 2$, cioè. Questo dimostra che $c_1 = -\frac{1}{6}$ e che, quindi, $c_2 = \frac{5}{2}$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{5}{2}e^{-x} + x - \frac{4}{3}$$

Esercizio 4. Si consideri la seguenti funzione in due variabili.

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 1$$

(i) Si determinino tutti i punti critici di f.

(ii) Si determinino quali dei punti critici sono massimi locali, minimi locali o punti di sella.

Soluzione:
(i) Il vettore gradiente è

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (4x(x^2+y^2) - 4x, 4y(x^2+y^2) + 4y)$$

Calcoliamo per quali punti (x,y) abbiamo $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Abbiamo un sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4x(x^2+y^2) - 4x = 0 \\ 4y(x^2+y^2) + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2+y^2-1) = 0 \\ 4y(x^2+y^2+1) = 0 \end{cases}$$

Guardando la seconda equazione, osserviamo che, siccome $x^2+y^2 \geq 0$, abbiamo $x^2+y^2+1 \geq 1$ e, quindi, $4y = 0$, i.e. $y = 0$. Tornando alla prima equazione, abbiamo allora $4x(x^2-1) = 0$, da cui si ottiene $x = 0$ o $x = 1$ o $x = -1$. Otteniamo quindi 3 punti critici che sono $(0,0)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$.
(ii) Calcoliamo adesso la matrice Hessiana, fatta delle derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (dal Teorema di Schwarz).

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 + 4 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo adesso le matrici Hessiane nei punti critici.

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad H(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad H(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $\mathsf{det} H(0,0) < 0$ e, quindi, $(0,0)$ è un punto di sella. Per gli altri punti, abbiamo $\mathsf{det} H(1,0) = \mathsf{det} H(0,1) > 0$ e, inoltre, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = 8 > 0$. Quindi entrambi punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono minimi locali della funzione.

Esercizio 5. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - t = 1 \\ -2x + z + t = 0 \\ -6y + 5z - t = 2 \\ x + t = 2 \end{cases}$$

(i) Si scriva la matrice completa associata al sistema di equazioni e si usi l'algoritmo di eliminazione Gaussiana portandola in forma ridotta.

(ii) Si usi il Teorema di Rouchè-Capelli per predire il numero di soluzioni (se infinite, si indichi il numero di parametri).

(iii) Se ci sono soluzioni, si trovino tutte le soluzioni (nel caso ci siano infinite soluzioni, si trovino le equazioni che fanno dipendere le variabili dal corretto numero di parametri).

Soluzioni:
(i) La matrice completa associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & |1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & |0 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & |2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & |2 \end{pmatrix}$$

Procediamo con l'algoritmo di eliminazione Gaussiana. Il primi passi sono $R_2 \to R_2 + 2R_1$ e $R_4 \to R_4 - R1$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & |1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & |2 \\ 0 & -6 & 5 & -1 & |2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & |1 \end{pmatrix}$$

Riscalando la seconda riga per $-\frac{1}{6}$ e, dopo, operando $R_3 \to R_3 - 6R_2$ e $R_4 \to R_4 - 3R_2$ otteniamo, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & |1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & |-\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 5 & -1 & |2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & |1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & |1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & |-\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & |2 \end{pmatrix}$$

Facciamo uno scambio $R_3 \leftrightarrow R_4$ e, successivamente, riscaliamo la riga 3 per 2, ottenendo rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & |1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & |-\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & |2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & |1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & |-\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & |4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

e siamo arrivati ad una forma ridotta.

(ii) Dal Teorema di Rouchè-Capelli, sappiamo che, siccome la ultima colonna della matrice completa non è dominante, ci sono soluzioni. Inoltre, si osservi che ci sono 3 colonne dominanti (le prime 3) e una colonna libera (la quarta colonna), per cui ci sono infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

(iii) Assegniamo un parametro α alla variabile corrispondente all'ultima colonna, cioè, mettiamo $t = \alpha$. Risolviamo adesso il sistema in funzione di questo parametro α. Procediamo eliminando le entrate sopra i pivot con operazioni elementari. Operiamo $R_2 \to R_2 + \frac{5}{6}R_3$ e $R_1 \to R_1 - 2R_3$ ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -7 & |-7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & |3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & |4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

e finalmente operiamo $R_1 \to R_1 + 3R_2$ ottenendo quindi la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & |2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & |3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & |4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

Il sistema associato, avendo già sostituito t per il parametro α è allora

$$\begin{cases} x + \alpha = 2 \\ y + \frac{8}{3}\alpha = 3 \\ z + 3\alpha = 4 \end{cases}$$

cioè abbiamo che tutte le soluzioni si ottengono scegliendo un parametro α in $\mathbb{R}$ e assegnando i seguenti valori alle variabili:

$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 - \frac{8}{3}\alpha \\ z = 4 - 3\alpha \\ t = \alpha \end{cases}$$