

15/12/2025

Equazioni differenziali del tipo

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Soluzione generale: $\hookrightarrow$ equazione Caratteristica $ax^2 + bx + c = 0$

Caso I: $b^2 - 4ac > 0$, r_1, r_2 soluzioni reali dell'equazione Caratteristica

$$\leadsto y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Caso II: $b^2 - 4ac = 0$, r unica soluzione reale dell'equazione Caratteristica

$$\leadsto y = k_1 e^{rx} + k_2 x e^{rx} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Caso III: $b^2 - 4ac < 0$, $\alpha + i\beta$ soluzioni complesse
 $\alpha - i\beta$ dell'equazione Caratteristica

$$\leadsto y = k_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + k_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Esercizio Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Passo 1 Trovare la soluzione generale.

— Equazione Caratteristica: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} \leadsto x = -2$$

— Soluzione generale: $y = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x}$

Passo 2 : Verificare Condizioni iniziali:

Prendo la derivata $y' = -2k_1 e^{-2x} + (k_2 e^{-2x} + (-2e^{-2x})k_2 x)$
 $= e^{-2x}(-2k_1 + k_2 - 2k_2 x)$

$$y(0) = k_1 e^0 + k_2 \cdot 0 \cdot e^0 = k_1$$

$$y'(0) = e^0(-2k_1 + k_2 - 2k_2 \cdot 0) = -2k_1 + k_2$$

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ -2k_1 + k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ -2 \cdot 3 + k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ -6 + k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 5 \end{cases}$$

Soluzione del problema di Cauchy:

$$y = 3e^{-2x} + 5xe^{-2x}$$

Esercizio: Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

- Equazione caratteristica

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} \leadsto x = -3 \text{ o } x = 1$$

- Soluzione generale:

$$y = k_1 e^{-3x} + k_2 e^x$$

- calcolo di y' :

$$y' = -3k_1 e^{-3x} + k_2 e^x$$

- Condizioni iniziali

$$y(0) = k_1 + k_2$$

$$y'(0) = -3k_1 + k_2$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ -3k_1 + k_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 - k_2 \\ -3(1 - k_2) + k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -3 + 3k_2 + k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1/2 \\ k_2 = 1/2 \end{cases}$$

- Soluzione del problema

$$y = \frac{1}{2} e^{-3x} + \frac{1}{2} e^x$$

- Equazione caratteristica

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm i2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -1 + \sqrt{2}i \text{ o } x = -1 - \sqrt{2}i$$

$$\alpha = -1 \quad \beta = \sqrt{2}$$

- Soluzione generale:

$$y = k_1 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + k_2 e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$$

- calcolo di y' :

$$y' = k_1 (-e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}x) e^{-x}) + k_2 (-e^{-x} \sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}x) e^{-x})$$

- Condizioni iniziali

$$y(0) = k_1$$

$$y'(0) = k_1(-1) + k_2(\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ -k_1 + \sqrt{2} k_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2 + \sqrt{2} k_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

- Soluzione del problema

$$y = 2 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$$

Equazioni differenziali di secondo ordine a coefficienti costanti non-omogenee.

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

Guarderemo come risolvere equazioni di questo tipo soltanto quando $f(x) = \underbrace{q_r(x)}_{\text{polinomio di grado } r} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\text{esponenziale con } \lambda \in \mathbb{R}}$

[alcune funzioni di questo tipo: $(x^2+1)e^{2x}$, $(x^3-x)e^{\sqrt{2}x}$, $(x^3+x+1)e^x$, e^x]

Annotations:
- $r=2$, $\lambda=2$ points to $(x^2+1)e^{2x}$
- $r=3$, $\lambda=\sqrt{2}$ points to $(x^3-x)e^{\sqrt{2}x}$
- $r=3$, $\lambda=0$ points to $(x^3+x+1)e^x$
- $r=0$, $\lambda=1$ points to e^x

Ricordiamo che per trovare la soluzione generale di una tale equazione lineare bisogna prima calcolare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

e sommare con una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea. Allora per trovare la soluzione generale bisogna soltanto calcolare una soluzione particolare e procedere come detto sopra.

Per questo, usiamo il detto "Metodo della somiglianza".

Slogan: cercare soluzioni "simili" a $f(x)$.

Infatti avremo una soluzione del tipo:

$$y(x) = x^k p_r(x) e^{\lambda x}$$

stesso λ che si trovava nella funzione $f(x)$

stesso grado di $q_r(x)$
dove $f(x) = q_r(x) e^{\lambda x}$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \text{ non è radice del polinomio caratteristico} \\ 1 & \text{se } \lambda \text{ è una di due radici diverse del polinomio caratteristico} \\ 2 & \text{se } \lambda \text{ è una radice doppia del polinomio caratteristico, cioè, è l'unica radice.} \end{cases}$$

! polinomio caratteristico: $ax^2 + bx + c = 0$.

Vediamo in un esempio come funziona:

$$y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3x}$$

$r=0 \quad \lambda=-3$

il metodo della somiglianza mi suggerisce di cercare soluzioni del tipo

$$y(x) = x^k \underbrace{p_0(x)}_{\text{costante } c} e^{-3x} = c x^k e^{-3x}$$

radici del polinomio caratteristico $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$\leadsto x = -3 \text{ o } x = 1$$

Quindi -3 è radice semplice del polinomio caratteristico (cioè, è una radice di due diverse), e allora $k=1$,

da cui viene che cerchiamo una soluzione del tipo

$$y(x) = c x e^{-3x}$$

Calcoliamo $y'(x)$ e $y''(x)$ in tale modo a sostituire questo candidato a soluzione nell'equazione.

$$\begin{aligned}y'(x) &= C e^{-3x} + Cx(-3e^{-3x}) \\ &= C e^{-3x}(1-3x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y''(x) &= -3C e^{-3x}(1-3x) + (-3)C e^{-3x} \\ &= -3C e^{-3x}(1-3x+1) \\ &= -3C e^{-3x}(2-3x)\end{aligned}$$

$$y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3x}$$

Facendo la sostituzione viene

$$-3C e^{-3x}(2-3x) + 2C e^{-3x}(1-3x) - 3C x e^{-3x} = 2e^{-3x}$$

dividendo per e^{-3x} , ottengo

$$-3C(2-3x) + 2C(1-3x) - 3Cx = 2$$

$$\Leftrightarrow -6C + 9Cx + 2C - 6Cx - 3Cx = 2$$

$$\Leftrightarrow -4C = 2 \quad \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Quindi la soluzione particolare è $y = -\frac{1}{2}x e^{-3x}$
e la soluzione generale dell'equazione non-omogenea

$$y = \underbrace{k_1 e^{-3x} + k_2 e^x}_{\text{soluzione generale dell'eq. omogenea}} - \frac{1}{2}x e^{-3x} \quad \rightarrow \text{soluzione particolare appena calcolata.}$$