

16/12/2025

$$a y'' + b y' + c y = \underbrace{q_r(x)}_{\text{polinomio di grado } r} e^{\lambda x}$$

Metodo della Somiglianza (per trovare una soluzione)

Cerchiamo soluzioni del tipo $y(x) = x^k \underbrace{p_r(x)}_{\text{stesso } r \text{ di sopra}} e^{\lambda x}$ (stesso λ di sopra)

$$k = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \text{ non è radice di } ax^2 + bx + c = 0 \\ 1 & \text{se } \lambda \text{ è radice, ma non unica di } ax^2 + bx + c = 0 \text{ (cioè } b^2 - 4ac > 0 \text{ e } r \text{ è radice)} \\ 2 & \text{se } \lambda \text{ è radice doppia di } ax^2 + bx + c = 0 \text{ (cioè } b^2 - 4ac = 0 \text{ e } r \text{ è radice)} \end{cases}$$

Esempio : $\begin{cases} y'' - 4y = 1 + x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ grado del polinomio $r = 2$
 $\rightarrow \lambda = 0$ poiché non vediamo l'esponenziale.

• Cominceremo risolvendo l'equazione omogenea associata

$$y'' - 4y = 0$$

polinomio caratteristico : $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Soluzione generale : $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-2x}$

• Adesso usiamo il metodo della somiglianza per trovare una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea.
osserviamo che $\lambda = 0$ non è radice del polinomio caratteristico, e quindi la tipologia di soluzione che andremo a cercare

$$\hat{=} \quad y(x) = x^0 \cdot p_2(x) \cdot e^{0x} = p_2(x)$$

Prendiamo l'espressione generale di un polinomio di grado 2

$$y(x) = p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{dove } a_2, a_1, a_0 \text{ sono costanti reali.}$$

$$y'(x) = 2a_2 x + a_1$$

$$y''(x) = 2a_2$$

$$y'' - 4y = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow 2a_2 - 4(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow -4a_2 x^2 - 4a_1 x + (2a_2 - 4a_0) = 1 + x^2$$

Siccome due polinomi sono uguali se e solo se i coefficienti di ogni potenza di x coincidono, otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{array}{l} \text{Coefficients di grado 2} \rightarrow \\ \text{Coefficients di grado 1} \rightarrow \\ \text{Coefficients di grado 0} \rightarrow \end{array} \begin{cases} -4a_2 = 1 \\ -4a_1 = 0 \\ 2a_2 - 4a_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{4} \\ a_1 = 0 \\ 2 \cdot (-\frac{1}{4}) - 4a_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{4} \\ a_1 = 0 \\ -4a_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{4} \\ a_1 = 0 \\ a_0 = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\text{Soluzione particolare: } y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}$$

$$\text{Soluzione generale: } y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8} + k_1 e^{2x} + k_2 e^{-2x}$$

• Controlliamo adesso le condizioni iniziali:

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

Calcoliamo $y'(x)$:

$$y'(x) = -\frac{1}{2}x + k_1 e^{2x} \cdot 2 + k_2 e^{-2x}(-2)$$

$$y'(0) = 2k_1 - 2k_2$$

$$y(0) = -\frac{3}{8} + k_1 + k_2$$

$$\begin{cases} 2k_1 - 2k_2 = 1 \\ -\frac{3}{8} + k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2k_1 - 2k_2 = 1 \\ k_1 + k_2 = \frac{11}{8} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \text{---} \\ k_1 = \frac{11}{8} - k_2 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2\left(\frac{11}{8} - k_2\right) - 2k_2 = 1 \\ \text{---} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \frac{11}{4} - 2k_2 - 2k_2 = 1 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} -4k_2 = -\frac{7}{4} \\ \text{---} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} k_2 = \frac{7}{16} \\ k_1 = \frac{11}{8} - \frac{7}{16} = \frac{22}{16} - \frac{7}{16} \\ = \frac{15}{16} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8} + \frac{15}{16}e^{2x} + \frac{7}{16}e^{-2x}$$

Osservazione: Nel metodo della somiglianza, se dobbiamo cercare una soluzione del tipo

$$x^k p_r(x) e^{\lambda x}, \quad \text{scriviamo}$$

$$p_r(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

dove $a_r, a_{r-1}, \dots, a_1, a_0$ sono le costanti che andremo

a determinare .

Osservazione 2 : Se abbiamo una uguaglianza di polinomi e dobbiamo determinare questi coefficienti, prendiamo equazioni determinate dalla uguaglianza dei coefficienti in ogni grado, cioè :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$\text{se e solo se } \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}$$