

Esercizio 1 Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s = (1, -1, 2) + \langle (1, 1, 0) \rangle .$$

- (a) Determinare una forma parametrica di r .
- (b) Determinare un sistema di equazioni che definisce s .
- (c) Determinare la posizione reciproca di r ed s .
- (d) Determinare un piano parallelo sia ad r che ad s e passante per il punto $(1, 1, 1)$.

Esercizio 2 Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i piani

$$\pi_1 : 2x - y = 2 \quad \text{e} \quad \pi_2 = (1, -1, 1) + \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle .$$

- (a) Determinare la posizione reciproca di π_1 e π_2 .
- (b) Determinare una retta parallela sia a π_1 che a π_2 e complanare con la retta $(1, -1, 2) + \langle (1, 1, 0) \rangle$.
- (c) Determinare l'equazione cartesiana di un piano che contenga $\pi_1 \cap \pi_2$ e sia parallelo a $(1, -1, 2) + \langle (1, 1, 0) \rangle$.

Esercizio 3 Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino il piano $\pi : x - y + z = -1$ e la retta $s = (2, -1, 1) + \langle (0, 1, 1) \rangle$.

- (a) Determinare la posizione reciproca di π ed s .
- (b) Determinare l'equazione del piano π' passante per il punto $(1, 0, -1)$ e contenente la retta s .
- (c) Determinare, se esiste, un piano la cui intersezione con π sia una retta parallela ad s .

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio

$$U = \langle (1, -1, 0), (0, 1, -1) \rangle .$$

- (a) Determinare una base ortonormale di U e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
- (b) Determinare un vettore v di norma 3 tale che $p_U(v) = (1, -2, 1)$, dove $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota la proiezione ortogonale sul sottospazio U .
- (c) Determinare tutti i sottospazi W di $\mathbb{R}^3$ tali che si abbia:

$$\dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad p_U(W) = \langle (1, -2, 1) \rangle .$$

ESERCIZIO

Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Determinare la forma parametrica di r e una forma cartesiana di s
- Determinare la posizione reciproca di r e s e la distanza tra r e s
- Determinare una retta t incidente sia in r che s e di vettore direttore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$