Come descrivere sottovarietà lineari

$\mathbb{R}^3$

$L = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$ retta

$P + \langle v_L \rangle \qquad v_L = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$

1° modo = Punto + giacitura

$\mathbb{R}^n$

$L : P + \langle w_1, \dots, w_k \rangle$

$\dim L = k$ ↑ base di V_L

2° modo = Equazioni parametriche

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + a \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 5 - a \\ z = 0 + 3a \end{cases}}$

$P = \begin{pmatrix}p_1\\ \vdots \\ p_n\end{pmatrix} \qquad \mathbb{A} = \mathbb{R}^n$

$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\ \vdots \\ p_n\end{pmatrix} + a_1 w_1 + \dots + a_k w_k$

3° modo = Equazioni cartesiane

Eliminazione dei parametri

$\cancel{a = x - 1}$

$\begin{cases} y = 5 - x + 1 \\ z = 3x - 3 \end{cases}$

$L : \begin{cases} x + y = 6 \\ -3x + z = -3 \end{cases}$

Descrivere L come soluzioni di un sistema lineare

$A \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = b \qquad (A|b)$

$rg(A) = rg(A|b) = n - k$

dove $k = \dim L$

Osservazione: $\begin{cases} x + y = 6 \\ -3x + z = -3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 6 - x \\ z = -3 + 3x \end{cases}$ $\quad L = \left\{ \begin{pmatrix}x\\6-x\\-3+3x\end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$

$x = 0$ $\quad P$

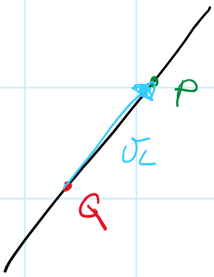
coeff. di x $\quad \langle v_L \rangle$

$Q + \langle v_L \rangle$

$L = \begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

$L = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

$P + \langle v_L \rangle$

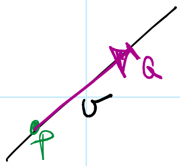


Fatto: $P+V_L = Q+V_M \iff \begin{cases} V_L = V_M \\ Q-P \in V_L = V_M \end{cases}$

Esempio:

$$\begin{array}{c} P \\ \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \end{array} + \boxed{\left\langle \begin{array}{c} v_1 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} v_2 \\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \end{array} \right\rangle} = \begin{array}{c} Q \\ P+v_1 \\ \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \end{array} + \boxed{\left\langle \begin{array}{c} v_1+v_2 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} v_1-v_2 \\ \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \end{array} \right\rangle}$$

$$Q-P = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = v_1 \in \langle v_1, v_2 \rangle$$



$P + \langle Q-P \rangle = P + \langle v \rangle \qquad Q \neq P$

Posizione reciproca: date $L = P+V_L$ e $M = Q+V_M$ sottovarietà lineari in $\mathbb{R}^n$ si dicono

1) **DISGIUNTE:** $L \cap M = \emptyset$
2) **INCIDENTI:** se $L \cap M \neq \emptyset$
3) **UGUALI o COINCIDENTI** se $L = M$
4) **PARALLELE:** $L \parallel M$ se ordinate con $\dim L \leq \dim M$

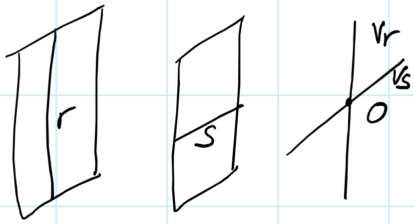
$V_L \subseteq V_M$

$L: P+V_L$ se trasliamo in O $\quad O+V_L$

$M: Q+V_M \quad O+V_M \quad V_L \subseteq V_M$

5) L e M si dicono SGHEMBE se

$$\begin{cases} L\cap M=\emptyset \\ V_L\cap V_M=\{\vec{0}\}\end{cases}$$



Posizione reciproca di 2 rette in $\mathbb{R}^2$.

$r:\ ax+by=c \qquad rg(a\ \ b)=1$

$s:\ a'x+b'y=c' \qquad rg(a'\ b')=1$

$r\cap s \quad \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c'\end{cases} \qquad A\underline{x}=b \qquad (A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c'\end{array}\right)$

$A\in M_{2,2}(\mathbb{R}) \qquad 1\le rg(A)\le 2$

$A|b\in M_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad 1\le rg(A|b)\le 2$

1° caso: $rg(A)=rg(A|b)=1$ per R-C $r\cap s\neq\emptyset$ incidenti

$\dim(r\cap s)=2-rg(A)=2-1=1 \qquad \dim(r\cap s)=1$ cioè

$\underset{1}{r\cap s}\subseteq \underset{1}{r} \implies r\cap s=r=s$ Rette uguali $\quad \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-4y=2\end{cases}$

sono anche // $V_r\cap V_s$ è la soluzione del sistema lineare omogeneo

$A\underline{x}=0 \qquad \dim(V_r\cap V_s)=2-rg(A)=2-1=1 \qquad V_r\cap V_s=V_r=V_s.$

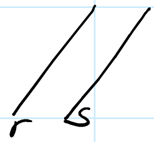
2° caso: $rg(A) = 1 \neq rg(A|b) = 2$

$x = 1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$
$x = 2$

per R-C $r \cap s = \emptyset \Rightarrow$ DISGIUNTE.

$V_r \cap V_s$: $Ax = 0$ $\quad \dim(V_r \cap V_s) = 2 - rg(A) = 2 - 1 = 1$

$\dim(V_r \cap V_s) = 1$ $\quad \underset{1}{V_r \cap V_s} \subseteq \underset{1}{V_r} \Rightarrow V_r \cap V_s = V_r = V_s$



$\Rightarrow$ PARALLELE

3° caso: $rg(A) = 2 = rg(A|b)$ per R-C $r \cap s \neq \emptyset$

incidenti $\dim(r \cap s) = 2 - rg(A) = 2 - 2 = 0$ cioè $r \cap s = P$

rette incidenti in un punto.

Riassunto

Conf. math.	$rg(A)$	$rg(A\|b)$	Configurazione
$r = s$	1	1	Rette uguali
$r \parallel s$ $r \cap s = \emptyset$	1	2	Rette parallele disgiunte
$r \cap s = P$	2	2	Rette incidenti in un punto

Posizione reciproca di 2 piani in $\mathbb{R}^3$

π_1: $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$ $\quad rg(a_1\ b_1\ c_1) = 1$

$\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \qquad rg(a_2\ b_2\ c_2)=1$

$$\pi_1\cap\pi_2 \quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)$$

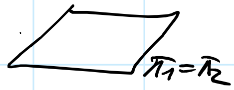
$A\in M_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad 1\leq rg(A)\leq 2$

$A|b\in M_{2,4}(\mathbb{R}) \qquad 1\leq rg(A|b)\leq 2$

1° caso: $rg(A)=rg(A|b)=1$ per R-C $\pi_1\cap\pi_2\neq\emptyset$

incidenti, $\dim(\pi_1\cap\pi_2)=3-rg(A)=3-1=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1\cap\pi_2=\pi_1=\pi_2$ Piani uguali



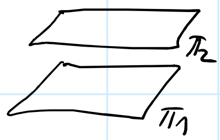
$\Rightarrow V_{\pi_1}=V_{\pi_2}=V_{\pi_1}\cap V_{\pi_2}$ quindi $\pi_1 // \pi_2$

2° caso: $rg(A)=1\neq rg(A|b)=2$ per R-C $\pi_1\cap\pi_2=\emptyset$

DISGIUNTI $\quad \dim(V_{\pi_1}\cap V_{\pi_2})=3-rg(A)=3-1=2 \quad Ax=\vec{0}$

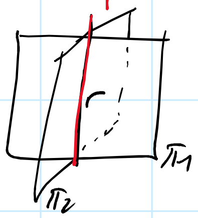
$\Rightarrow \underset{2}{V_{\pi_1}\cap V_{\pi_2}}\subseteq \underset{2}{V_{\pi_1}} \Longrightarrow V_{\pi_1}\cap V_{\pi_2}=V_{\pi_1}=V_{\pi_2} \Rightarrow \pi_1 // \pi_2$

PARALLELI.



3° caso: $rg(A)=2=rg(A|b)$ per R-C $\pi_1\cap\pi_2\neq\emptyset$

incidenti $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 3 - rg(A) = 3 - 2 = 1$ piani incidenti in una retta. $\pi_1 \cap \pi_2 = r$



Riassunto: pos. reci di π_1 e π_2 in $\mathbb{R}^3$

	rg(A)	rg(A|b)	Configurazione
$\pi_1 = \pi_2$	1	1	Piani uguali
$\pi_1 // \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$	1	2	Piani paralleli disgiunti
$\pi_1 \cap \pi_2 = r$	2	2	Piani incidenti in una retta

Esempio.

1) $\pi_1: 3x - 8z = 1$ $\quad$ $\pi_2: 3x - 8z = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -8 & 1 \\ 3 & 0 & -8 & 3 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 1 \neq rg(A|b) = 2$

Piani paralleli disgiunti.

---

2) $\pi_1: 3x - 8z = 1$ $\quad$ $\pi_2: y = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$rg(A) = rg(A|b) = 2$

Piani incidenti in una retta

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} 3x - 8z = 1 \\ y = 5. \end{cases}$$

Posizione reciproca di un piano π e una retta r in $\mathbb{R}^3$

$$r \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$$

$$\pi: \ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \qquad rg(a_3 \ b_3 \ c_3)=1$$

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right) \qquad A\in M_{3,3}(\mathbb{R}) \quad 2\leq rg(A)\leq 3$$

$$A|b\in M_{3,4}(\mathbb{R}) \quad 2\leq rg(A|b)\leq 3$$

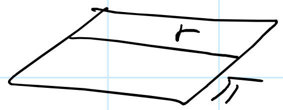
1° caso: $rg(A)=2=rg(A|b)$ per R-C $r\cap\pi\neq\emptyset$

incidenti $\dim(r\cap\pi)=3-rg(A)=3-2=1$ $r\cap\pi=r$ cioè

$r\subseteq\pi$ retta contenuta nel piano.

$\dim(V_r\cap V_\pi)=1$ $\quad \underset{1}{V_r\cap V_\pi}\subseteq \underset{1}{V_r} \Rightarrow V_r\cap V_\pi=V_r$ cioè $V_r\subseteq V_\pi$

$\Rightarrow r//\pi$



$r\in\pi$.

2° caso: $rg(A)=2\neq rg(A|b)=3$ per R-C $r\cap\pi=\emptyset$

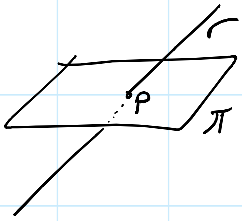
Disgiunti $\dim(V_r\cap V_\pi)=3-rg(A)=3-2=1$ cioè

$V_r\cap V_\pi=V_r \Rightarrow V_r\subseteq V_\pi \Rightarrow r//\pi$ retta e piano

paralleli disgiunti.

3° caso: $rg(A)=3=rg(A|b)$ per R-C $r\cap\pi\neq\emptyset$ incidenti

$\dim(r\cap\pi)=3-rg(A)=3-3=0$ retta incidente un piano in un punto



$r\cap\pi=P$

Riassunto pos. rec. r e π in $\mathbb{R}^3$

	$rg(A)$	$rg(A\|b)$	Configurazione
$r\subseteq\pi$	2	2	Retta contenuta nel piano
$r//\pi$ $r\cap\pi=\emptyset$	2	3	Retta e piano paralleli disgiunti
$r\cap\pi=P$	3	3	Retta incidente un piano in un punto

Posizione reciproca di due rette r e s in $\mathbb{R}^3$

$$r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$$

$$s: \begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z=d_4 \end{cases} \qquad rg\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}=2$$

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}\right)$$

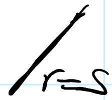
$A\in M_{4,3}(\mathbb{R})$

$2\leq rg(A)\leq 3$

$A|b\in M_{4,4}(\mathbb{R})$

$2\leq rg(A|b)\leq 4$

1° caso: $rg(A)=rg(A|b)=2$ per R-C $r\cap s\neq\emptyset$ incidenti

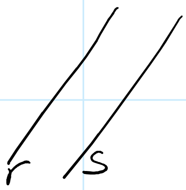
$\dim(r\cap s)=3-rg(A)=3-2=1 \Longrightarrow r\cap s=r=s$ 

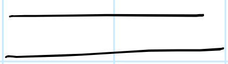
Rette uguali.

2° caso: $rg(A)=2\neq rg(A|b)=3$ per R-C $r\cap s=\emptyset$

disgiunte $\dim(V_r\cap V_s)=3-rg(A)=3-2=1$ perciò

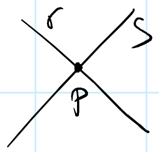
$\underbrace{V_r\cap V_s}_{1}\subseteq \underbrace{V_r}_{1} \Longrightarrow V_r\cap V_s=V_r=V_s$ rette parallele $r//s$





3° caso $rg(A)=3=rg(A|b)$ per R-C $r\cap s\neq\emptyset$

incidenti $\dim(r\cap s)=3-rg(A)=3-3=0$ rette

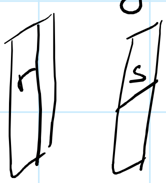


incidenti in un punto $r\cap s=P$

4° caso: $rg(A)=3\neq rg(A|b)=4$ per R-C $r\cap s=\emptyset$

disgiunte $\dim(V_r\cap V_s)=3-rg(A)=3-3=0 \Rightarrow V_r\cap V_s=\{\vec{0}\}$

$\Rightarrow$ rette sghembe



Riassunto: pos. rec. di r e s in $\mathbb{R}^3$

	rg(A)	rg(A|b)	Configurazione
$r=s$	2	2	Rette uguali
$r // s$ $r \cap s = \emptyset$	2	3	Rette parallele disgiunte
$r \cap s = P$	3	3	Rette incidenti in un punto
$r \cap s = \emptyset$ $V_r \cap V_s = \{\vec{0}\}$	3	4	Rette sghembe

Esempio: in $\mathbb{R}^4$ i piani

$\pi_1 : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ di forma par. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix}$ e

$\pi_2 : \begin{cases} z=0 \\ t=0 \end{cases}$ di forma par. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si intersecano

Sol in

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

π_1 al tempo $t=0$ è l'asse z, ma avendo anche t come parametro è un piano in $\mathbb{R}^4$

π_2 è al tempo $t=0$ il piano coordinato x, y