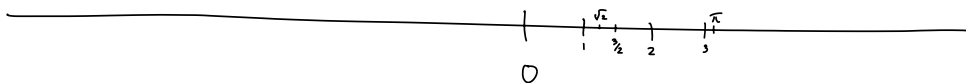


10/12/2025

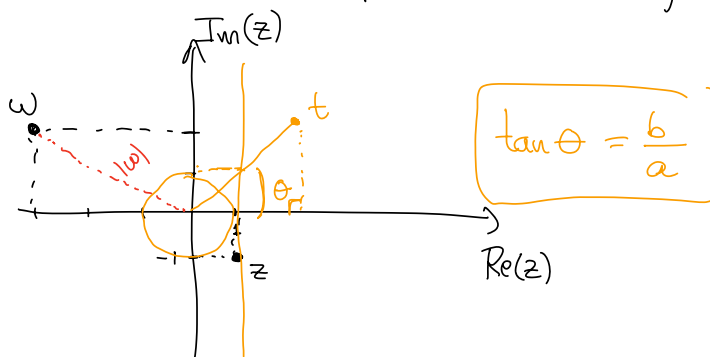
Ricordiamo che i numeri reali sono geometricamente rappresentati da una retta



I numeri Complessi, invece, vengono rappresentati in un piano, detto il piano Complesso:

$$z = 1 - i \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Re}(z) = 1 \\ \rightarrow \text{Im}(z) = -1 \end{array}$$

$$w = -3 + 2i \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Re}(z) = -3 \\ \rightarrow \text{Im}(z) = 2 \end{array}$$



In alternativa ad identificare un numero Complesso tramite le sue coordinate nel piano Complesso, possiamo identificarlo avendo altri due pezzi di informazione:

- distanza al origine (modulo del numero complesso)
- angolo con asse orizzontale (argomento del numero Complesso)

Dato un numero complesso $z = a + bi$, come facciamo a calcolare il modulo e l'argomento di z ?

- modulo di z , $|z| = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

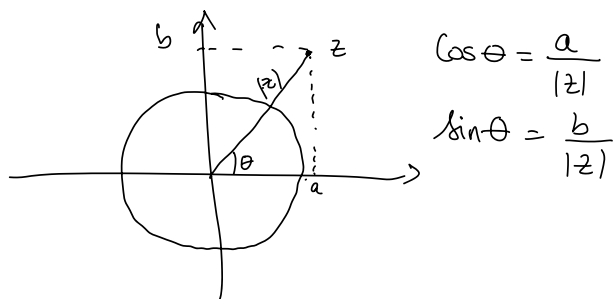
- argomento di z , $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ nel intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$

se $a+bi$ è $\rightarrow$ se $a \neq 0$
nel quadrante I e IV altrimenti $\arg(z) = \pi/2$ o $-\pi/2$ dipendendo se

$$z = bi \quad b > 0 \quad \text{ o } \quad z = bi \quad b < 0.$$

Se $a+bi$ è nel quadrante II e III allora prendo $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ nell'intervallo $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Avendo il module e l'argomento a disposizione ...



$$a = |z| \cos \theta \quad b = |z| \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \text{allora } z &= |z| \cos \theta + |z| \sin \theta \cdot i \\ &= |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

x reale.

forma trigonometrica di z.

Ricordiamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Questa formula permette di estendere la funzione esponenziale ai numeri complessi, definendo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

esponenziale ^{complessa} ha tutte le buone proprietà dell'esponenziale reale, in particolare

$$e^{z+w} = e^z e^w ; \quad e^{zw} = (e^z)^w$$

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

$$e^{bi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n i^n}{n!}$$

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^7 = -i$$

$$i^8 = 1$$

$$i^9 = i$$

⋮

$$= \underbrace{\sum_{n \text{ pari}} n^0 \text{ reali}}_{\cos b} + \underbrace{\sum_{n \text{ dispari}} i}_{\sin b \ i}$$

Tornando alla forma trigonometrica, ogni numero z è della forma

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= |z| e^{i\theta}$$

↳ forma esponenziale di z .

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Si suggeriscono i seguenti video di Elia Bombardelli su Youtube

- "Numeri complessi : introduzione e rappresentazione"
- "Numeri complessi : operazioni in forma Cartesiana"
- "Numeri complessi : Forma trigonometrica e esponenziale"
- "Numeri complessi : Equazioni con i numeri complessi"

Soluzioni di equazioni quadratiche:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(=) x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $b^2 - 4ac > 0 \leadsto$ due soluzioni reali

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $b^2 - 4ac = 0 \leadsto$ una soluzione reale

$$r_1 = \frac{-b}{2a}$$

Se $b^2 - 4ac < 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-(4ac - b^2)}}{2a} \quad \text{dove } 4ac - b^2 > 0$$

$$(=) x = \frac{-b \pm \sqrt{-1} \sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$(=) x = \frac{-b \pm i \sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{-b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

due soluzioni complesse
e coniugate, cioè

$$r_2 = \overline{r_1}$$

Con questo torniamo alle equazioni differenziali di
secondo ordine del tipo

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (*)$$

Stavamo cercando soluzioni del tipo $y = e^{rx}$ e
avevamo concluso che per avere una soluzione
di questo tipo, dobbiamo avere r soluzione
di $\underbrace{ax^2 + bx + c = 0}$

Equazione caratteristica di (*)

Caso I: Se $b^2 - 4ac > 0$, allora l'equazione
caratteristica ha due radici reali r_1 e r_2
e allora sia $e^{r_1 x}$ che $e^{r_2 x}$ sono
soluzioni dell'equazione differenziale.

Infatti si può facilmente verificare che tutte
le funzioni del tipo

$$y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \quad \text{dove}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'equazione.

Inoltre, queste sono tutte le soluzioni in
questo caso.

Caso II: Se $b^2 - 4ac = 0$, allora abbiamo
una soluzione $e^{r_1 x}$ dell'equazione differenziale.
Verifichiamo però che anche $y = x e^{r_1 x}$

è anche soluzione!

$$y' = 1 \cdot e^{r_1 x} + x \cdot e^{r_1 x} \cdot r_1 = e^{r_1 x} (1 + r_1 x)$$

$$\begin{aligned} y'' &= r_1 e^{r_1 x} (1 + r_1 x) + r_1 \cdot e^{r_1 x} \\ &= e^{r_1 x} (r_1 + r_1^2 x + r_1) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione, abbiamo

$$a e^{r_1 x} (2r_1 + r_1^2 x) + b e^{r_1 x} (1 + r_1 x) + c x e^{r_1 x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{r_1 x} (a 2r_1 + a r_1^2 x + b + b r_1 x + c x) = 0$$

$$\Rightarrow e^{r_1 x} \left(\underbrace{(a r_1^2 + b r_1 + c)}_{=0} x + \underbrace{2a r_1 + b}_{=0} \right) = 0$$

= 0 perché r_1 è soluzione
dell'equazione $a x^2 + b x + c = 0$

Ricordiamo adesso che, siccome $b^2 - 4ac = 0$, allora

$$r_1 = \frac{-b}{2a} \quad (\Rightarrow) \quad 2a r_1 = -b$$

$$(\Rightarrow) \quad 2a r_1 + b = 0 \quad \leftarrow$$

$$(\Rightarrow) \quad 0 = 0 \quad \checkmark$$

Si può verificare che in questo caso tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$\boxed{y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 x e^{r_1 x}} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Caso III : $b^2 - 4ac < 0$

$\leadsto$ 2 soluzioni complesse coniugate

$$r_1 = \alpha + i\beta$$

$$r_2 = \alpha - i\beta$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ci aspettiamo soluzioni dell'equazione differenziale
del tipo $e^{r_1 x}$ e $e^{r_2 x}$

$$\parallel$$
$$e^{(\alpha + i\beta)x}$$

$$\parallel$$
$$e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$\parallel$$

$$e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

$$= e^{\alpha x} (\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x))$$

Si dimostra allora che tutte le soluzioni in questo
caso sono date da

$$y = k_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + k_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$