

Si consideri $A_K = \begin{pmatrix} 1 & 2K-2 & K+1 \\ 0 & 2K-1 & K \\ 0 & -2K+2 & -K \end{pmatrix}$, $K \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- B è ortogonalmente diagonalizzabile? Se sì determinare una base ortogonale di autovettori di B
- $\forall K \in \mathbb{R}$, determinare λ di A_K e la loro m.a.
- per quali K , A_K è diagonalizzabile?
- determinare $K_0 \in \mathbb{R}$ t.c. A_{K_0} sia simile a B , determinare K invertibile t.c. $B = K^{-1} A_{K_0} K$

a) B è simmetrica $\Rightarrow$ è ortogonalmente diagonalizzabile

$$P_B(t) = \det(B - tI_3) = (1-t)(t^2-1) = -(t-1)^2(t+1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 & \text{con } m.a. = 2 \\ \lambda = -1 & \text{con } m.a. = 1 \end{cases}$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B_{\text{ortogonale}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ di autovettori di } B$$

$$b) P_{A_K}(t) = \det(A_K - tI_3) = (1-t)((2K-1-t)(-K-t) + K(2K-2))$$

$$\stackrel{!}{=} (1-t)(t^2 + (-K+1)t - K) = (1-t)(t+1)(t-K)$$

per $K \neq 1, -1$ autovetori: $\begin{cases} 1 & m.a. = 1 \\ -1 & m.a. = 1 \\ K & m.a. = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{è diagonalizzabile}$

per $K = 1$ " " : $\begin{cases} 1 & m.a. = 2 \\ -1 & m.a. = 1 \end{cases} \rightarrow V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ (c)
è diagonalizzabile

per $K = -1$ " " : $\begin{cases} 1 & m.a. = 1 \\ -1 & m.a. = 2 \end{cases} \rightarrow V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ no!

d) B è simile alla matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{in particolare: } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{H^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_H$$

è l'unica matrice A_K diagonalizzabile con autovettori 1 con $m.a. = 2$ e -1 con $m.a. = 1$
è $A_1 \Rightarrow$ cerco una base di autovettori di A_1 : $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Rightarrow \text{posso scrivere } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{I^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = H^{-1} B H \\ D = \underline{I}^{-1} A_1 \underline{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H^{-1} B H = \underline{I}^{-1} A_1 \underline{I}$$

voglio ricavarci a: $B = \underline{K}^{-1} A_1 \underline{K}$

$$\Rightarrow B = \underbrace{H \cdot \underline{I}^{-1}}_{\underline{K}^{-1}} \cdot A_1 \cdot \underbrace{\underline{I} \cdot H^{-1}}_{\underline{K}}$$

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sia $B_\kappa = \begin{pmatrix} 2 & \kappa^2 & \kappa-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, per quali κ la matrice B_κ è ortogonalmente diagonalizzabile?

Per il teorema spettrale B_κ è ortogonalmente diag $\Leftrightarrow B_\kappa$ è simmetrica

Ovvero quando è soddisfatto il sistema $\begin{cases} \kappa^2 = 1 & \rightarrow \kappa = \pm 1 \\ \kappa - 2 = -1 & \rightarrow \kappa = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\kappa = 1}$

$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è ortogonalmente diagonalizz.

Determinare per tale matrice B_1 una matrice ortogonale H e una matrice diagonale D t.c. $D = H^{-1} B H$

$\Rightarrow$ devo determinare una base ortonormale di autovettori di B .

1) polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P(t) &= \det(B - tI) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ -1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} \\ &= (2-t) \left[(2-t)(2-t) - 1 \right] - 1 \left[2-t+1 \right] - 1 \left[1+2-t \right] \\ &= (2-t)(t^2 - 4t + 3) - 2(3-t) = -t^3 + 6t^2 - 9t = -t(t^2 - 6t + 9) \\ &= -t(t-3)^2 \end{aligned}$$

2) autovalli di B :

$$\lambda = 0 \text{ con mult. alg } 1$$

$$\lambda = 3 \text{ con mult. alg } 2$$

3) autospazi di B :

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3 = \ker(B - 3I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ora devo determinare una base ortonormale di autovettori di B

Considero la base $B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} \right\}$ e la ortogonalizzo:

$$u_1' = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

normalizzo solo

$$w_1 \text{ è ortogonale a } u_1 \text{ per il teorema spettrale} \Rightarrow w_1' = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

w_2 è ortogonale a u_1 per il teorema spettrale, ma non è ^{necessariamente} ortogonale a w_1

$\Rightarrow$ Gram Schmidt:

$$w_2'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = \frac{w_2''}{\|w_2''\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad e \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 1 → trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$\begin{aligned} z^5 &= (1+i)^2 + 3 \frac{1+2i}{2-i} \\ &= 1+(-1)+2i + 3 \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 2i + 3 \frac{2+i+4i-2}{4+1} = 2i + 3 \frac{5i}{5} \\ &= 5i = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

per De Moivre le soluzioni sono nella forma:

$$z_k = \sqrt[5]{5} \left(\cos \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right) \quad \text{con } k=0,1,2,3,4$$

ESERCIZIO 2 → determinare la forma algebrica di $w = \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \right)^4$ $\frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)}{2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)}$
determinare la forma trigonometrica di tutti i complessi z t.c. $z^3 = w$

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}}{2 \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}} \right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 e^{4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) i} = \frac{1}{4} e^{\left(\pi + \frac{4}{3}\pi \right) i} \\ &= \frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$z^3 = w \Rightarrow z_k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) \quad k=0,1,2$$

ESERCIZIO 3 → Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = a + 2b \\ y = a \\ z = b \\ t = -a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 2z \\ t = -y + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases}$$

a) determinare l'equazione cartesiana di U

b) determinare una base di $U \cap W$ e completarla a una base di $U + W$.

I sottospazi U e W sono in somma diretta?

c) determinare un sottospazio U' e un sottospazio W' t.c. $U + W = U \oplus U' = W \oplus W'$

è possibile avere $U' = W'$?

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ -1 & 1 & t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 2 & x-y \\ 0 & 3 & x+t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x-y-2z \\ 0 & 0 & x+t-3z \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow U: \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - 3z + t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{forma a scala}} \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$b) U \cap W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha - (-\alpha + \beta) - 2(\alpha + 2\beta) = 0 \\ (-\alpha + \beta) - (\alpha + 2\beta) + 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \begin{cases} -5\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow U \text{ e } W \text{ non sono in somma diretta}$$

c) una base di $U + W$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ che completa una base di } U \cap W$$

$$\Rightarrow U' = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ e } W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{oppure } U' = W' = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ESERCIZIO 4 $\rightarrow \bar{\Phi}_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\bar{\Phi}_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y+kz+(k-1)w \\ 2x+ky+2z \end{pmatrix}$$

a) determinare A_k associata a $\bar{\Phi}_k$ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominiob) per $k=0$ determinare base di $\ker \bar{\Phi}_0$ e base di $\text{Im } \bar{\Phi}_0$ c) $\forall k \in \mathbb{R}$ determinare base di $\ker \bar{\Phi}_k$ e base di $\text{Im } \bar{\Phi}_k$ d) $\forall k \in \mathbb{R}$ determinare la controimmagine $\bar{\Phi}_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$a) A_K = A_{E_4 E_3} \bar{\Phi}_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & K & K-1 \\ 2 & K & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Riduciamo A_K in forma a scala:

$$\begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 2\text{I} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & K-1 & K-1 \\ 0 & K & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - K\text{II}} \begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad t \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & K-1 & K-1 \\ 0 & 0 & K(1-K) & K(1-K) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{per } K \neq 0, 1 \quad \text{rk } A_K = 3 \Rightarrow \text{Im } \bar{\Phi}_K = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \text{Ker } \bar{\Phi}_K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} z = -t \\ y = -(K-1)z - (K-1)t = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ -z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{per } K = 0 \quad \text{rk } A_K = 2 \Rightarrow \text{Im } \bar{\Phi}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \text{Ker } \bar{\Phi}_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = z + t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -z \\ z+t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{per } K = 1 \quad \text{rk } A_K = 2 \Rightarrow \text{Im } \bar{\Phi}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \text{Ker } \bar{\Phi}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \bar{\Phi}_K^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$$

$$\text{per } \boxed{K=0} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Im } \bar{\Phi}_0 ? \quad \text{Si!} \Rightarrow A_0 = A_{E_4 E_3} \bar{\Phi}_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v + \text{Ker } \bar{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$v - v' \in \text{Ker } \bar{\Phi}_0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\kappa=1} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{\in} \operatorname{Im} \bar{\Phi}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{NO!}$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \emptyset$$

$$\text{per } \boxed{\kappa \neq 0, 1} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} \bar{\Phi}_\kappa = \mathbb{R}^3 \quad \text{Sì!}$$

$$\Rightarrow A_\kappa = A_{\varepsilon_4 \varepsilon_3} \bar{\Phi}_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \kappa & \kappa-1 \\ 2 & \kappa & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{matrix}$$

$$f(e_4) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa-1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{poiché } \kappa \neq 1 \text{ posso scrivere:}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\kappa-1} f(e_4) = \frac{1}{\kappa-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_\kappa^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v + \ker \bar{\Phi}_\kappa$$

$$= \frac{1}{\kappa-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata alla scelta della base canonica $\mathcal{E}_3$ sia nel dominio che nel codominio è:

$$A = A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare i valori del parametro reale k per i quali $f + k \cdot id_{\mathbb{R}^3}$ non sia invertibile.
2. Per tali valori di k , determinare una base del nucleo e delle equazioni per l'immagine di $f + k \cdot id_{\mathbb{R}^3}$.
3. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che si abbia

$$A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_3, f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $W = \langle (1, -2, -1), (2, 1, 3) \rangle$ e sia $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la simmetria ortogonale di asse W .

1. Determinare una base ortonormale di autovettori di σ .
2. Determinare $\sigma(0, -1, 5)$.
3. Determinare tutti i vettori v per i quali $v + \sigma(v) = (-2, 4, 2)$ e $\sigma(v)$ è ortogonale a v .

ESERCIZIO 2

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = A_{E_3 E_3} f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$f + k \cdot \text{id}$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ è suriettiva $\Leftrightarrow$ è biiettiva
 $\Leftrightarrow$ il determinante di A_k è diverso da zero.

1) la matrice di $f + k \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ rispetto alla base canonica E_3 è:

$$A_k = A_{E_3 E_3} f + k \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3} = A + k I_3 = \begin{pmatrix} 3+k & 0 & 0 \\ 0 & 2+k & 1 \\ 0 & 1 & 2+k \end{pmatrix}$$

$f + k \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ non è invertibile quando $\det A_k = 0$

$$\Rightarrow \det A_k = (3+k) \left[(2+k)^2 - 1 \right] = (3+k) (4 + k^2 + 4k - 1)$$

$$= (3+k) (3+k) (1+k) = (3+k)^2 (1+k) = 0 \Leftrightarrow k = -3, -1$$

$f + k \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ non è invertibile per $k = -3, -1$

2) $\boxed{k = -1}$ $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\text{Im}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Im} f: \begin{cases} x = 2a \\ y = b \\ z = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Im} f: \begin{cases} y - z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{k = -3}$$

$$\text{Ker}(f - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Im}(f - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Im} f: \begin{cases} x = 0 \\ y = b \\ z = -b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Im} f: \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$3) \quad A_{B, E_3, f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

dalla definizione di una matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto ad una data scelta di basi, segue che:

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{ossia}$$

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

calcoliamo l'inversa di A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot S^T$$

$$\det A = 3(2 \cdot 2 - 4) = 9$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

1) $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la simmetria di asse W e diagonale $W^\perp \Rightarrow$ per definizione

$$\theta(u+v) = u - v \quad \text{con } u \in W \text{ e } v \in W^\perp$$

$\Rightarrow$ gli autovalori di θ sono $+1$ e -1

W è autospazio di θ rispetto all'autovalore $+1$

$W^\perp$ è autospazio di θ rispetto all'autovalore -1

Base ortogonale di W :

$$u_1' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_2'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_W^{\text{ORT}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W^\perp: \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \quad \Rightarrow W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow B_{W^\perp}^{\text{ORT}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

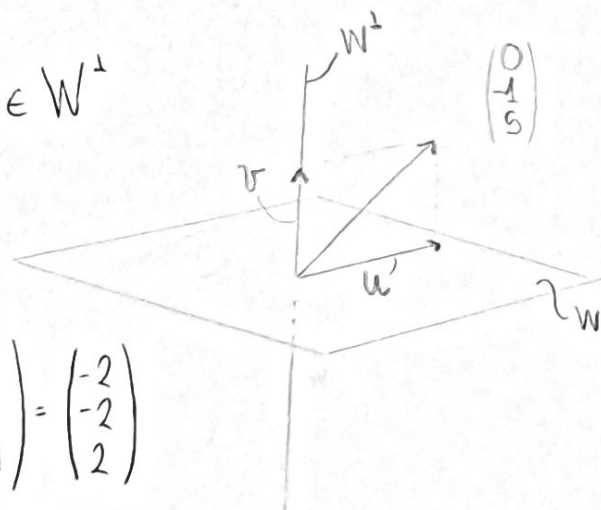
2) $\theta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \theta(u+v) \quad \text{con } u \in W \text{ e } v \in W^\perp$

scompongo $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = u + v$

$$\Rightarrow v = P_{W^\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u = P_W \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

poiché $\theta(u+v) = u - v \Rightarrow \theta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \theta \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$3) \quad v \text{ t.c.} \quad v + \theta(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \theta(v) \perp v$$

$$v = u_1 + u_2 \quad \text{con } u_1 \in W \quad \text{e} \quad u_2 \in W^\perp$$

$$1^a \text{ cond}) \Rightarrow \theta(v) = u_1 - u_2$$

$$v + \theta(v) = u_1 + u_2 + u_1 - u_2 = 2u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{Inoltre } u_2 \in W^\perp \Rightarrow \boxed{u_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2^a \text{ cond}) \quad \theta(v) \perp v \Rightarrow \theta(v) \cdot v = 0$$

$$(u_1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2) = u_1 \cdot u_1 - u_2 \cdot u_2 - \cancel{u_1 \cdot u_2} + \cancel{u_1 \cdot u_2}$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - \alpha^2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$