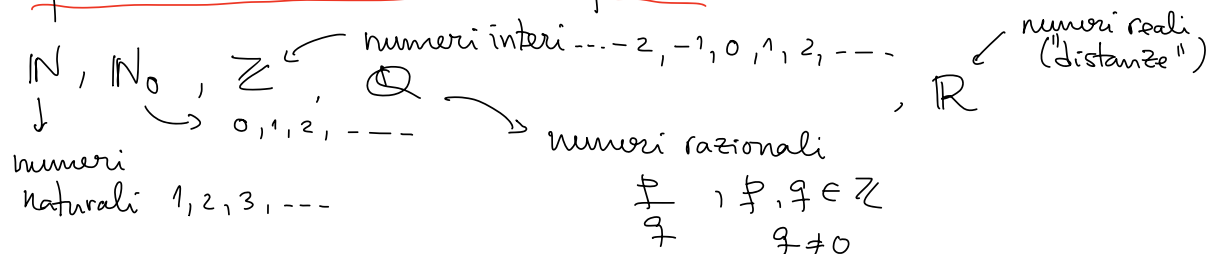


09/12/2025

Ripasso Sui numeri Complessi



$\mathbb{C} \rightarrow$ Contiene $\mathbb{R}$ e radici di numeri negativi.

Forma algebrica di un numero complesso: $z = a + bi$ dove
 $a \in \mathbb{R}$, detta la parte reale di z e scrivo $\text{Re}(z) = a$;
 $b \in \mathbb{R}$, detta la parte immaginaria di z e scrivo $\text{Im}(z) = b$.
 i è detta l'unità immaginaria e ha la proprietà $i^2 = -1$.

Esempi • tutti numeri reali r sono della forma $r + 0 \cdot i$
(tutti numeri reali sono anche numeri complessi)

• $1 + i$, $2 - 3i$, $\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$, $\pi + e^{\sqrt{2}}i$

Operazioni aritmetiche sui numeri Complessi

$$z = a + bi$$
$$w = c + di$$

$$z + w = ?$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

↓
somma
dei complessi

↓
somma delle
parti reali

↓
somma delle
parti
complesse

↓
somme
di numeri
reali.

Esempio : $\left(\frac{1}{2} - 2i\right) + (3 + i) = \frac{7}{2} - i$

La somma di numeri complessi ha buone proprietà:

- è commutativa, cioè $z + w = w + z$
- è associativa, cioè $z + (w + k) = (z + w) + k$
- ha un elemento neutro, cioè un elemento detto 0 tale che $z + 0 = z$ ($0 = 0 + 0i$)
- ogni z in $\mathbb{C}$ ammette un suo simmetrico z' tale che $z + z' = 0$ (questo simmetrico è $-z$, cioè se $z = a + bi$, allora $-z = -a - bi$)

$$z = (a + bi)$$

$$w = (c + di)$$

$$z \cdot w = ?$$

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Esempio $(1 + i) \cdot (2 - \frac{1}{2}i) = 2 + 2i - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2 =$
 $= 2 + \frac{1}{2} + (2 - \frac{1}{2})i = \underline{5/2} + \underline{3/2}i$

Buone proprietà del prodotto di numeri complessi:

- Commutatività: $zw = wz$
- associatività: $(zw)k = z(wk)$
- esistenza di elemento neutro

$$z \cdot \underbrace{(1 + 0i)}_1 = z$$

Esistenza del inverso di un numero complesso $z = a + bi \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2 + \cancel{abi} - \cancel{abi} - b^2 i^2} =$$

si moltiplica per il coniugato.

⚠ Il coniugato di un numero complesso $z = a + bi$ è il numero complesso $\bar{z} = a - bi$

$$\Rightarrow \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\text{parte reale di } \frac{1}{z}} + \underbrace{\frac{-b}{a^2+b^2}i}_{\text{parte immaginaria di } \frac{1}{z}}$$

Oss: z, w numeri complessi, $w \neq 0$

$$\text{allora } \frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$$